§ 6. Векторный метод на плоскости

Из разобранных выше примеров видно, что решение многих стереометрических задач распадается на последовательное решение нескольких планиметрических задач. При этом часто возникает задача о нахождении отношения длин отрезков в каких-либо плоских сечениях или проекциях. Решение этих задач может быть получено с помощью теорем Фалеса и подобия, а также с помощью теоремы Менелая. Достаточно эффективно может быть использован и *векторный метод* решения, который мы напомним в этом параграфе.

Утверждение. *Пусть векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *на плоскости не равны нулю и не параллельны. Тогда для любого вектора* $\vec{x}$ *существует единственное представление вида* $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, *где* λ *и* μ *– некоторые числа.*

Замечание. Ненулевые непараллельные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости принято называть *базисом* на плоскости, или просто *базисом*, а представление $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ – *разложением* вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$. Отметим, что мы нигде не предполагали, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Следствие. *Если мы получили разложение вектора* $\vec{x}$ *по базису* $\vec{a}, \vec{b}$ *двумя способами:* $\vec{x} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b}$, *то*

$$\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2.$$

Это простое соображение помогает находить отношение длин отрезков в плоских конфигурациях.

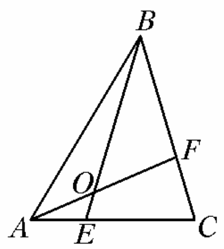

Рис. 27

Пример 19. В ΔABC $E \in AC$, $F \in BC$, $AE/AC = 1/3$, $BF/FC = 2$, $O = AF \cap BE$. Найти AO/OF и BO/OE (рис.27).

□ Выберем базис $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. $BF/BC = 2/3$.

Пусть $AO = \lambda AF$, $BO = \mu BE$. Выразим вектор $\overrightarrow{AO}$ двумя способами:

(1) $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AF}$ и (2) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$.

$$(1): \overrightarrow{AO} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} + (2/3)\overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= \lambda(\overrightarrow{AB} + (2/3)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})) = (\lambda/3)\vec{a} + (2\lambda/3)\vec{b}.$$

$$(2): \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BE} = (1-\mu)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AE} = (1-\mu)\vec{a} + (\mu/3)\vec{b}.$$

По следствию имеем систему $\dfrac{\lambda}{3} = 1 - \mu$, $\dfrac{2\lambda}{3} = \dfrac{\mu}{3}$, откуда $\lambda = \dfrac{3}{7}$, $\mu = \dfrac{6}{7}$. В итоге $AO/OF = 3/4, BO/OE = 6.$

Пример 20. В параллелограмме $ABCD$ $E \in BC$, $F \in CD$: $BE / EC = 1/2$, $CF / FD = 3$, $O = AE \cap BF$. Найти AO / AE и BO / BF (рис.28).

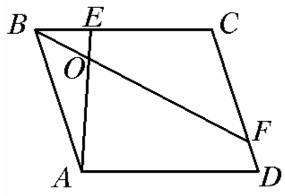

Рис. 28

□ За базис выберем $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$.

$AO = \lambda\, AE, BO = \mu BF$.

Выразим вектор $\vec{BO}$ двумя способами:

(1) $\vec{BO} = \mu\, \vec{BF}$ и (2) $\vec{BO} = \vec{AO} - \vec{AB}$.

(1): $\vec{BO} = \mu\, \vec{BF} = \mu(-\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{DF}) =$

$$= \mu(-\vec{a} + \vec{b} + (1/4)\,\vec{a}) = (-3\mu/4)\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}.$$

(2): $\vec{BO} = \vec{AO} - \vec{AB} = \lambda\,\vec{AE} - \vec{AB} =$

$$= \lambda(\vec{AB} + \vec{BE}) - \vec{AB} = \lambda(\vec{AB} + (1/3)\,\vec{BC}) - \vec{AB} = (\lambda - 1)\,\vec{a} + (\lambda/3)\,\vec{b}.$$

По следствию имеем систему $-3\mu/4 = \lambda - 1$, $\mu = \lambda/3$, откуда $\lambda = 4/5, \mu = 4/15$.