§ 5. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Нахождение углов и расстояний

Определения перпендикулярных прямых, перпендикулярной прямой и плоскости, перпендикулярных плоскостей даны в школьном учебнике геометрии. Перечислим самые важные теоремы, которые используются при решении задач: признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах, *признак перпендикулярности плоскостей.* Формулировки этих теорем можно найти в учебнике.

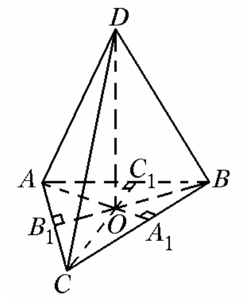


Рис. 19

Пример 12. Ребра AB и CD, AD и BC тетраэдра перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BD также перпендикулярны.

□ Опустим из точки D перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 19). По теореме о трех перпендикулярах из того, что $CD \perp AB$ следует, что $CO \perp AB$, т.е. точка O лежит на прямой, содержащей высоту CC_1 треугольника ABC. Аналогично, точка O лежит на прямой, содержащей высоту AA_1 и, значит, O – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Следовательно, $BO \perp AC$ и по теореме о трех перпендикуляров $BD \perp AC$. ■

Пример 13. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $AD = b$, ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды, $SA = c$. Найти: а) расстояние от точки A до плоскости SCD; б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно ребру SD.

□ а) По определению *расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.*

Покажем, что перпендикуляр, опущенный из точки A на ребро SD является перпендикуляром к плоскости SCD (рис.20). Действительно, по условию $SA \perp ABC \Rightarrow CD \perp SA$, кроме того, $CD \perp DA$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp SAD \Rightarrow CD \perp AE$. Но по построению $AE \perp SD$, т.е. прямая AE перпендикулярна пересекающимся прямым CD и SD, следовательно, $AE \perp CSD$. Длину отрезка AE найдем, дважды вычислив площадь треугольника SAD:

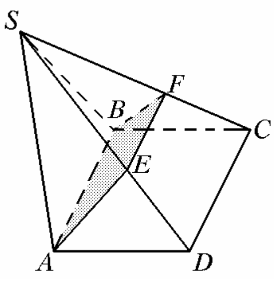


Рис. 20

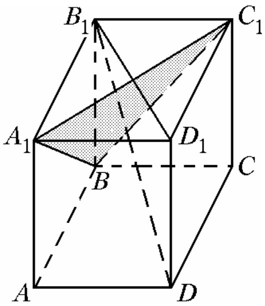
$$\frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} AE \cdot SD \Rightarrow AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

б) В п. а) мы показали, что $AE \perp SD$ и $CD \perp SAD$, где $CD \perp SD$.

Значит, искомое сечение – трапеция $AEFB(EF \parallel CD \parallel AB)$. Эта трапеция – прямоугольная, т. к. $EF \parallel CD$, а $CD \perp AE$, т. е. $h = AE = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Из подобия треугольников ASE и DSA: $SE = AS^2 : SD = c^2 : \sqrt{b^2+c^2}$, а из подобия треугольников SEF и SDC:

$EF = (CD \cdot SE) : SD = \dfrac{ac^2}{b^2+c^2}$. Таким образом,



$$S_\alpha = \frac{1}{2}(EF+AB)AE = \frac{abc}{2\sqrt{b^2+c^2}}\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+1\right).$$

Рис. 21

Пример 14. Доказать, что прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является кубом тогда и только тогда, когда $B_1D \perp A_1BC_1$.

□ Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис.21), то $A_1C_1 \perp D_1B_1$, но D_1B_1 – проекция наклонной DB_1 на плоскость $A_1B_1C_1$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $DB_1 \perp A_1C_1$. Аналогично $DB_1 \perp A_1BC_1$. Обратно, если $DB_1 \perp A_1BC_1$, то $DB_1 \perp A_1C_1$ и по теореме о трех перпендикулярах $DB_1 \perp A_1C_1$. Но диагонали прямоугольника перпендикулярна, если он является квадратом, значит $A_1B_1 = B_1C_1$. Аналогично $A_1B_1 = BB_1$, т. е. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Пример 15. Доказать, что сечение куба плоскостью, перпендикулярной его главной диагонали и проходящей через центр куба, – правильный шестиугольник.

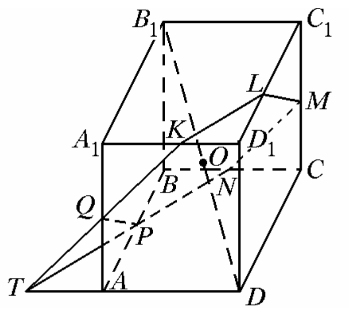


Рис. 22

□ Пусть K, L, M, N, P, Q – середины ребер A_1D_1, $D_1C_1, C_1C, CB, BA, AA_1$ соответственно (рис.22). Покажем, что эти точки лежат в плоскости сечения. Из равенства прямоугольных треугольников B_1A_1K и DD_1K (по двум катетам) следует, что $B_1K = DK$. Поэтому если O – центр куба, то KO – медиана равнобедренного треугольника B_1KD, следовательно $KO \perp B_1D$, т.е. KO лежит в плоскости α. Аналогично и остальные вершины шестиугольника $KLMNPQ$ лежат в плоскости α. Длины всех сторон шестиугольника $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, где a – длина ребра куба. Далее, если T – точка пересечения α и прямой AD, то из равенства треугольников KA_1Q и TAQ, NBP и TAP следует, что $PT = QT = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, т.е. треугольник PTQ равносторонний. Отсюда $\angle NPQ = 180° - \angle TPQ = 120°$. Аналогично и другие углы шестиугольника $KLMNPQ$ равны 120°, т. е. все стороны и углы шестиугольника равны между собой, следовательно, он правильный.

Пример 16. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ вычислить:

□ а) расстояние от вершины A до плоскости SCD, если $AB = a$, $DS = b$;

б) наибольшее возможное значение угла между ребром SA и плоскостью SCD.

а) В отличие от примера 13, перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость SCD, не попадает на прямую SD (рис.23). Действительно, $AB \parallel CD$ и значит $AB \parallel SCD$, поэтому расстояние h от любой точки прямой AB до плоскости SCD одно и то же. Пусть E и F – середины ребер AB и CD. Покажем, что если $EE_1 \perp SF$, то $EE_1 \perp SCD$ **(вспомогательные сечения типа SEF, SAC очень часто используются при решении стереометрических задач!).** Высота SO пирамиды перпендикулярна прямой DC, лежащей в плоскости ее основания. Кроме того, $EF \perp DC$, и

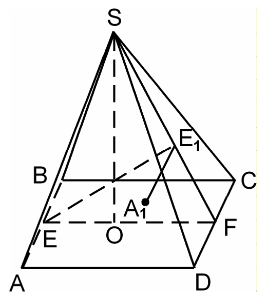


Рис. 23

значит, $DC \perp SEF$, откуда $DC \perp EE_1$. Но по построению $EE_1 \perp SF$, таким образом, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $EE_1 \perp SCD$. (Теперь можно определить положение проекции A_1 точки A на плоскость SCD: четырехугольник AEE_1A_1 – прямоугольник, поэтому $E_1A_1 = AE = DF$, т.е. A_1 лежит вне треугольника SCD). Рассмотрим площадь треугольника SEF, получаем $\frac{1}{2}SO \cdot EF = \frac{1}{2}EE_1 \cdot SF$, откуда

$$EE_1 = a\left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}\right) : \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\ .$$

б) *Углом между прямой и плоскостью является угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.* Поэтому искомый угол φ – это $\angle ASA_1$, т.е. $\sin\varphi = \frac{AA_1}{AS} = \frac{EE_1}{AS} = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{b\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$.

Введем безразмерную переменную $x = \frac{a}{b}$, тогда $\sin\varphi = x\frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$.

Пусть $t = x^2$, большему значению $\sin\varphi$ соответствует (в силу $\sin\varphi > 0$) большее значение $f(t) = \sin^2\varphi = 2t\frac{2-t}{4-t}$. Имеем:

$$f'(t) = 2\left(\frac{2t - t^2}{4-t}\right)' = 2\frac{(2-2t)(4-t) - (2t - t^2)(-1)}{(4-t)^2} = 2\frac{t^2 - 8t + 8}{(4-t)^2} =$$

$$= 2\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(4-t)^2},\ \text{где}\ t_1 = 4 - 2\sqrt{2}, t_2 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Трехчлен $(t-t_1)(t-t_2)$ меняет знак с «+» на «–» в точке t_1, причем $t_1 \in (0;\sqrt{2})$, поэтому $\max f(t) = f(t_1) = 2(2-\sqrt{2})^2$.

Итак, $\max \sin\varphi = \sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2$ и $\max\varphi = \arcsin(2\sqrt{2}-2)$.

Пример 17. Точка M – середина ребра D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти угол и расстояние между прямыми A_1C_1 и CM.

□ *Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным.* Пусть N – середина ребра BB_1 (рис. 24), тогда $A_1N \parallel CM$ и значит $\varphi = \angle NA_1C_1$ – искомый.

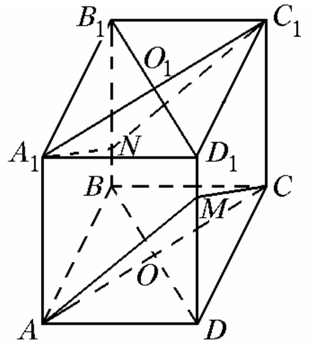


Рис. 24

Из треугольника A_1NC_1 со сторонами $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, $A_1N = C_1N = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ получаем:

$$\cos\varphi = \left(\frac{1}{2}A_1C_1\right)/A_1N = \sqrt{\frac{2}{5}}, \varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

□ *Расстоянием h между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 называется длина наименьшего из отрезков с концами на данных прямых.*

Утверждение 1. h – длина общего перпендикуляра к l_1 и l_2.

Утверждение 2. h – расстояние между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

Согласно признаку параллельности плоскостей из того, что $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1N \parallel CM$, следует, что (A_1C_1N) $\parallel$(ACM). Это и есть параллельные плоскости, содержащие скрещивающиеся прямые A_1C_1 и CM. Поэтому h – расстояние между плоскостями, что то же самое, расстояние от точки N до плоскости ACM. Докажем, что эта длина перпендикуляра NN_1, опущенного из точки N на прямую MO, где O – центр грани $ABCD$. Действительно, $AC \perp D_1D$ и кроме того, $AC \perp BD$. Поэтому $AC \perp BB_1D_1D$, в этой плоскости лежит прямая NN_1, поэтому, в частности, $AC \perp NN_1$, т.е. прямая NN_1 перпендикулярна прямым AC и MO, т.е. плоскости ACM. Рассмотрим вспомогательное сечение BB_1D_1D (рис.25). Пусть T – точка пересечения прямых MO и BB_1. Тогда из $\Delta TBO = \Delta MDO$ следует $TB = MD = \dfrac{a}{2}$, откуда $NT = a$. Теперь из подобия треугольников NTN_1 и O_1NB_1 получаем $NN_1 : O_1B_1 = NT : O_1N$, где $O_1N = a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = NN_1 = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

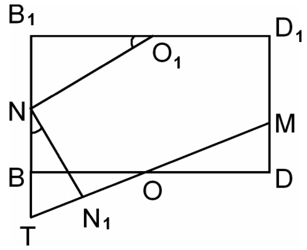


Рис. 25

Пример 18. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AD_1 перпендикулярно плоскости A_1BC_1.

Утверждение. Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

(В одну сторону это утверждение называется «признак перпендикулярности плоскостей»).

Таким образом, нам достаточно пересечь прямую AD_1 какой-либо прямой, перпендикулярной плоскости A_1BC_1 (рис.26). В примере 14 мы показали, что $DB_1 \perp A_1BC_1$, поэтому нужно построить

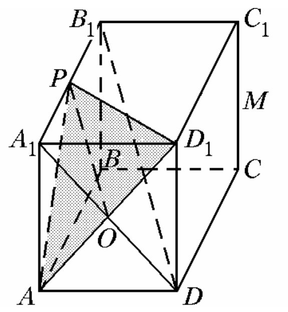


Рис. 26

прямую l, $l \parallel DB_1$, перпендикулярную AD_1. Как легко показать, в качестве l можно взять OP – среднюю линию треугольника DA_1B_1 (во-первых, $OP \parallel DB_1$, во-вторых, $O \in AD_1$). Треугольник APD_1 – искомое сечение.