§ 3. Сечения многогранников

Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется *сечением* многогранника указанной плоскостью (*секущей плоскостью*).

Мы будем заниматься решением следующей задачи: на данном изображении многогранника построить его сечения данной плоскостью.

По сложившейся традиции, мы будем далее писать «построить сечение многогранника», опуская слово «изображение». Кроме того, вершины изображения многоугольника мы будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие вершины оригинала. В формулировке нашей задачи мы не указали способ задания секущей плоскости. Это можно сделать по-разному, например, тремя точками, не лежащими на одной прямой, двумя точками и условием параллельности некоторой прямой, точкой и условием параллельности некоторой плоскости и т.п.

Сначала рассмотрим самый простой случай, когда секущая плоскость задана тремя точками, две из которых лежат в плоскости одной грани многогранника, а третья – в плоскости грани, смежной с первой. В этом случае, как правило (если не возникает параллельности некоторых прямых, на чем мы ниже остановимся особо), для обоснования построения не приходится выходить за рамки аксиом и, быть может, простейших следствий из них. Приведем характерный пример.

Пример 5. Построить сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M (рис.9 a); $K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, $M \in (ASC)$.

□ Для решения поставленной задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями тетраэдра. Предположим, что плоскость

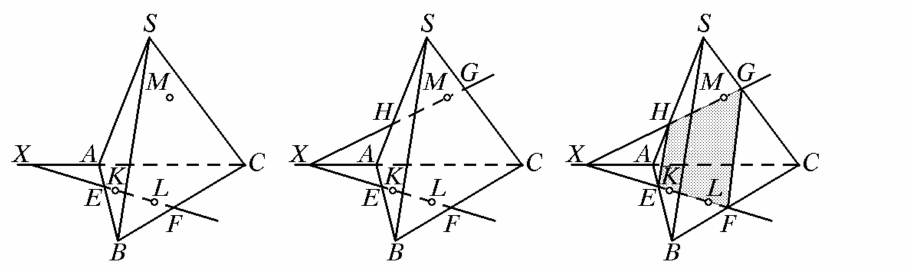


Рис. 9

KLM (которую обозначим α) построена. Так как плоскости α и (ABC) имеют общую точку K, то они пересекаются по прямой, проходящей через точку K, а раз эти плоскости имеют еще одну общую точку – точку L, то прямая KL является линией пересечения плоскостей α и ABC. Отсюда вытекает следующее построение: проведем прямую KL до пересечения с отрезками AB и BC в точках E и F (рис. 9б). Пусть эта прямая пересекает прямую AC в точке X. Будем рассуждать аналогично: точки X и M лежат как в плоскости α, так и в плоскости (ASC), следовательно, прямая XM – их линия пересечения, поэтому строим прямую XM до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G (рис. 9в). Повторяя рассуждения по той же схеме, делаем вывод о том, что плоскости α и (ASB) пересекаются по прямой EH, а плоскости α и (BSC) – по прямой FG. Поэтому для завершения построения остается соединить точку E с точкой H и точку F с точкой G (рис. 9в).

Что же изменится в приведенных рассуждениях, если прямые KL и AC окажутся параллельными? В этом случае придется воспользоваться теоремами о параллельности в пространстве. Так как прямая KL параллельна прямой AC, лежащей в плоскости (ASC), то по признаку параллельности прямой и плоскости прямая KL параллельна плоскости (ASC). Но плоскость α проходит через прямую KL, следовательно (теорема о линии пересечения), линия пересечения плоскостей α и ASC должна быть параллельна прямой KL. Поэтому строим через точку M прямую, параллельную KL, до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G. Соединив точки H и E, а также G и F, получим искомое сечение (рис. 10).

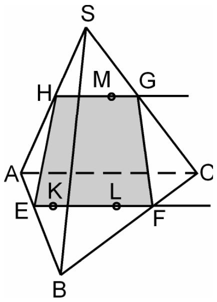
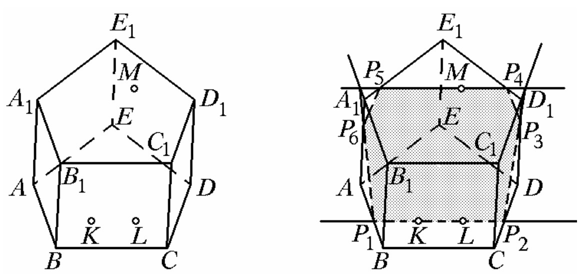


Рис. 10

Мы видим, что проведенное построения сечения в обоих случаях было основано на нахождении линий пересечения секущей плоскости с плоскостями граней многогранника – так называемых *следов* секущей плоскости на плоскостях граней. Отсюда и происходит название метода построения сечений, который мы только что проиллюстрировали, – «метод следов». Приведем теперь пример использования для обоснования построения сечения теоремы о линиях пересечениях двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. Эту теорему довольно естественно использовать, когда речь идет о сечениях многогранников, имеющих параллельные грани: призм, параллелепипедов, кубов и т. д.

Пример 6. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M (рис.11 a), где $K, L \in (ABC)$, $M \in (A_1B_1C_1)$.

□ Сначала построим прямую KL – линию пересечения плоскостей KLM и ABC. Пусть эта прямая пересекает отрезки AB и CD в точках P_1 и P_2. Для того, чтобы построить след секущей плоскости на плоскость грани $A_1B_1C_1$, заметим, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны (по определению призмы), поэтому линия пересечения секущей плоскости и плоскости $A_1B_1C_1$ должна быть параллельна прямой KL (и, конечно, проходит через точку M). Строим прямую, проходящую через точку M параллельно прямой KL до пересечения с отрезками A_1E_1 и E_1D_1 в точках P_5 и P_4. Дальнейшее построение аналогично построению примера 5. Сечение изображено на рис. 11б.



а) б)

Рис. 11

Теоремы о параллельности в пространстве применяют и в случае, когда одним из условий задания секущей плоскости является ее параллельность некоторой прямой, некоторой плоскости или двум скрещивающимся прямым. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 7. Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α, проходящей через точку O пересечения диагоналей AC_1 и CA_1

параллельно плоскости $\beta = (AB_1C)$. Найти отношение площадей сечений призмы плоскостями α и β.

 По условию $\alpha \parallel \beta$, поэтому α и β пересекают грани призмы по параллельным прямым. Следовательно, α пересекает грань AA_1C_1C по отрезку KL, где K и L – середины ребер CC_1 и AA_1 соответственно (рис. 12), так как $KL \parallel AC$ и KL проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма AA_1C_1C. Аналогично, α пересекает грань AA_1B_1B по отрезку LM, где M – середина ребра A_1B_1. Аналогично, α пересекает ребро B_1C_1 в его середине N. Сечение – трапеция $KLMN$ ($MN \parallel A_1C_1 \parallel KL$).

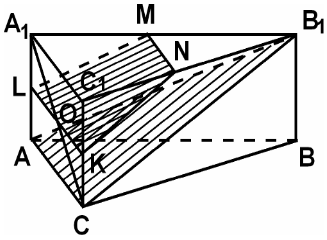


Рис. 12

Как мы доказали, $LM \parallel AB_1$ и $LK \parallel AC$, поэтому $\angle MLO = \angle B_1AC$, кроме того, $ML : B_1A = OL : CA = 1 : 2$. Следовательно, треугольники MLO и B_1AC подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Отсюда высота h_1, опущенная из точки M на OL в два раза меньше высоты h, опущенной из точки B_1 на CA. Значит,

$$\frac{S_\alpha}{S_\beta} = \left(\frac{1}{2}h_1\left(MN + KL\right)\right) : \left(\frac{1}{2}h \cdot CA\right) = \frac{3}{4}.$$

Пример 8. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью α, проходящей через точки C и M параллельно ребру SD, где M – середина ребра DA. Определить, в каком отношении плоскость α делит высоту пирамиды, а также ребра, которые она пересекает.

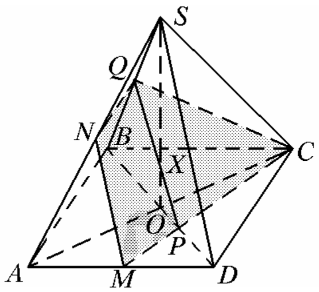


Рис. 13

Так как прямая SD параллельна α и SD лежит в плоскости ASD, то α пересекает плоскость ASD по прямой, параллельной SD (рис. 13). Значит α пересекает грань ASD по отрезку MN, где N – середина SA. Аналогично α пересекает плоскость BSD по прямой PQ, параллельной SD, где P – точка пересечения прямых CM и BD, так как $CM \in \alpha$ и $BD \in BSD$. Соединив точку Q с точками N и C, получаем искомое сечение $MNCQ$.

Как мы показали выше, N – середина ребра AS. Далее, в треугольнике ACD P – точка пересечения медиан ($AO = OC$ и $DM = MA$), поэтому $DP = \frac{2}{3}DO = \frac{1}{3}DB$. Из подобия треугольников BSD и BQP получаем, что $BQ : BS = BP : BD = 2 : 3$. Наконец, отношение $SX : XO$, где X – точка пересечения SO и плоскости α, т.е. $X = SO \cap PQ$, найдем, воспользовавшись известной из планиметрии теоремой Менелая.

Пусть на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях лежат точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем четное число из них лежат на сторонах, а не на продолжениях; тогда для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Согласно этой теореме, примененной к треугольнику BSO и прямой PXQ, получаем: $\frac{SX}{XO} \cdot \frac{OP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QS} = 1$, т.е. $\frac{SX}{XO} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = 1$, откуда $\frac{SX}{XO} = 2$. ■

Пример 9. Плоскость α пересекает ребра AS, SB и BC пирамиды $SABC$. Докажите, что α пересекает ребро CA.

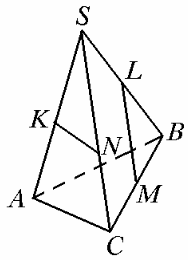


Рис. 14

Первый способ: $\alpha = (KLM)$. Плоскость α делит пространство на два полупространства Π_1 и Π_2. Из условия следует, что если $A \in \Pi_1$, то $S \in \Pi_2$, далее $S \in \Pi_2 \Rightarrow B \in \Pi_1 \Rightarrow C \in \Pi_2$. Итак, A и C в разных полупространствах, поэтому отрезок AC пересекает α.

Второй способ: Пусть $K = \alpha \cap AS, L = \alpha \cap SB, M = \alpha \cap BC$. Плоскость α пересекает ребро AS, значит она пересекает грань ASC. Если α не пересекает ребро AC, то она пересекает ребро SC в точке N. Но тогда, по признаку, прямые NK и LM – скрещиваются и не могут лежать в одной плоскости.