

§ 1. Параллельность прямых и плоскостей

Определение параллельных прямых, параллельной прямой и плоскости, параллельных плоскостей приведены в школьном учебнике геометрии. В дополнение к материалу учебника приведем некоторые теоремы, часто используемые при решении многих задач по стереометрии.

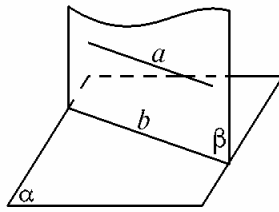


Рис. 1

Теорема 1. (теорема о линии пересечения). Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

□ Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \parallel \alpha$ (рис.1). Тогда a и b лежат в плоскости β и не пересекаются, иначе точка

их пересечения принадлежала бы плоскости α , что противоречит параллельности a и α , следовательно, $a \parallel b$.

Теорема 2. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

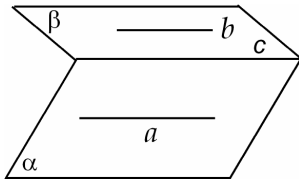


Рис. 2

□ Пусть $a \parallel b$, где $a \subset \alpha, b \subset \beta$, причем $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2). Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$.

Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. По теореме о линии пересечения $c \parallel a$. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$.

Теорема 3. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

□ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a , а прямая b параллельна плоскостям α и β . Возьмем на прямой a точку M и проведем плоскость γ через b и M (рис. 3). Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a_1 , а плоскость β – по прямой a_2 . По теореме о линии пересечения $a_1 \parallel b$ и $a_2 \parallel b$. Но прямые a_1 и a_2

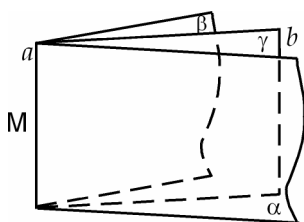


Рис. 3

имеют общую точку M , следовательно, это одна и та же прямая a (так как $a_1 \in \alpha$, $a_2 \in \beta$).

Итак, $a \parallel b$.

Пример 1. Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

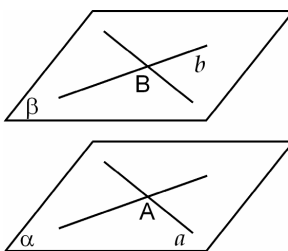


Рис. 4

□ Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмем на прямой a точку A и проведем через нее прямую, параллельную прямой b (в плоскости, проходящей через A и b). Через a и построенную прямую проведем плоскость α . Аналогично строим плоскость β (рис. 4). По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$.

Приведенное построение часто оказывается полезным при решении многих задач о скрещивающихся прямых, поэтому следует его запомнить.

помнить.