

§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел.

Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a, b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a$, а ордината равна $\operatorname{Im} z = b$. Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a, b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор \overrightarrow{OM} (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0, 0)$ и концом в точке $M(a, b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i$.

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости позволяют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + ib$.

2. Модуль комплексного числа. Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + ib$

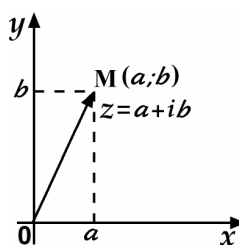


Рис. 1

называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой r . Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только том случае, когда $z = 0 + i0 = 0$.

Пусть $z = a + ib$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + ib$ и обозначается \bar{z} ; $\bar{\bar{z}} = a - bi$.

Заметим, что

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и \bar{z}_2 и к делению их произведения на

действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4).

Пример 1. Найти частное $\frac{3-5i}{-1+10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3-5i}{-1+10i} = \frac{(3-5i)(-1-10i)}{(-1+10i)(-1-10i)} = \frac{-3+5i-30i+50i^2}{1+100} = -\frac{53}{101} - \frac{25}{101}i.$$

3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$. Им соответствуют векторы с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2) . Тогда числу $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$ будет соответствовать вектор с координатами $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2 , надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2 . Аналогично, разности $z_2 - z_1$ комплексных чисел z_2 и z_1 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_2 и z_1 .

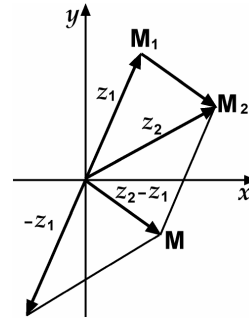


Рис. 2

Модуль $|z_2 - z_1|$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 по определению модуля есть длина вектора $z_2 - z_1$. Построим этот вектор, как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 2). Получим вектор \overrightarrow{OM} , равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Следовательно, $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

- а) $|z - i| = 1$, б) $1 < |z + 3 + i| < 3$,
- в) $|z - 1| < |z + 1|$?

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 3).

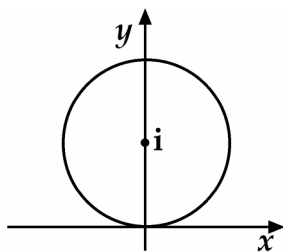


Рис. 3

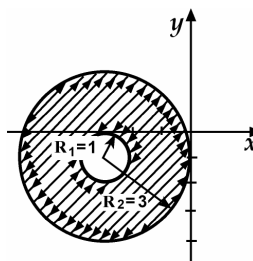


Рис. 4

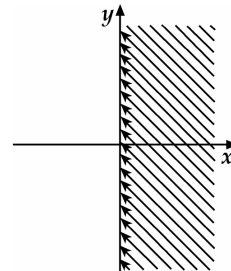


Рис. 5

б) Условию $1 < |z + 3 + i| < 3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $(-3 - i)$ на расстояние, большее 1, но меньше 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке $(-3 - i)$ и радиусами $R_1 = 1, R_2 = 3$ (см. рис. 4: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z = 1$, чем к точке $z = -1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

4. Аргументы комплексного числа. Аргументом комплексного числа $z = a + ib$ ($z \neq 0$) называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z ; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z = a + ib$, пишут $\varphi = \operatorname{arg} z$ или $\varphi = \operatorname{arg}(a + ib)$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента будем считать, что $z \neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z = 0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z| = 0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда

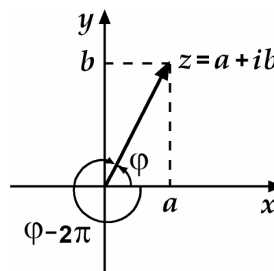


Рис. 6

определен единственным образом в отличие от аргумента, ко-

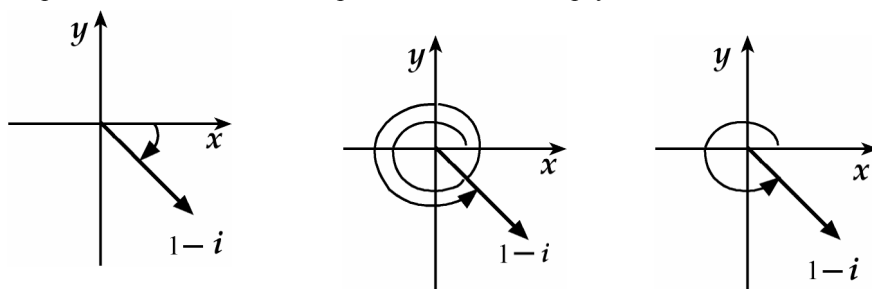


Рис. 7

торый всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый

аргумент числа z , то углы $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z . Например, аргументами числа $(1 - i)$ являются углы $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис.7). Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π .

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 6) следует, что если $\varphi = \operatorname{arg}(a + ib)$, то имеет место следующая система

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|}. \end{cases} \quad (5)$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства системы (5), то $\varphi = \arg(a + ib)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + ib$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a + ib$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5).

Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1 - i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = 1 - i$ лежит в IV четверти. Поэтому достаточно найти такое решение одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a + ib)$, $a \neq 0$, то из (5) следует, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$. Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg} \varphi = -1$, но не является аргументом числа $(1 - i)$.

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1 - i)$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = -1 - i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1$, которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0$, то есть $z = bi$, то либо $\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (если $b < 0$).