

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый ряд натуральных чисел $1, 2, \dots, n, \dots$. В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§ 1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Комплексные числа. Комплексными числами называют выражения вида $a + ib$, где a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ, для которых следующим образом вводятся понятия равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a + ib$ и $c + id$ равны тогда и только тогда, когда

$$a = c \text{ и } b = d;$$

б) суммой чисел $a + ib$ и $c + id$ называется число

$$a + c + i(b + d);$$

в) произведением чисел $a + ib$ и $c + id$ называется число

$$ac - bd + i(ad + bc).$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d), \quad (1)$$

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc). \quad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z = a + ib$ означает, что комплексное число $a + ib$ обозначено буквой z .

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z = a + ib$ и обозначается $\operatorname{Re} z$; пишут $\operatorname{Re} z = a$ или $\operatorname{Re}(a + ib) = a$. Действительное число b называется мнимой частью числа $z = a + ib$ и обозначается $\operatorname{Im} z$, пишут $\operatorname{Im} z = b$ или $\operatorname{Im}(a + ib) = b$. Символ i называется мнимой единицей.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a + i0$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a + i0) + (c + i0) = a + c + i0,$$

$$(a + i0)(c + i0) = (ac) + i0.$$

Таким образом, отождествив число $a + i0$ с действительным числом a , получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно $a = a + i0$. В частности, число $0 = 0 + i0$ будем, как обычно, называть нулем, а число $1 = 1 + i0$ – единицей. Числа 1 и 0 обладают теми же свойствами, что и в случае действительных чисел: $z \cdot 1 = z$; $z + 0 = z$; $z \cdot 0 = 0$.

Числа $0 + ib$ называют чисто мнимыми и обозначают

$$ib : 0 + i7 = 7i, \quad 0 - i2 = -2i.$$

На основании формулы (2) найдем значение выражения $i^2 = ii$:

$$i^2 = ii = (0 + i1)(0 + i1) = -1 + i0 = -1.$$

Таким образом,

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a + ib$ и $c + id$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1 .

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 8 + 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$. По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3 + 2) = 3 + 5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8 + 3i)$ и $(-5 + 2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(-5 + 2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2 .

2. *Ассоциативность сложения:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .

3. $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z .

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется *разность* чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.

5. *Коммутативность умножения:*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2 .

6. *Ассоциативность умножения:*

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .

7. *Дистрибутивный закон*

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .

8. $1 \cdot z = z$ для любого комплексного числа z .

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 , где $z_1 \neq 0$, существует число z такое, что $z_1 z = z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\frac{z_2}{z_1}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения операций сложения и умножения (см. формулы (1) и (2)) и равенства комплексных чисел. Докажем свойство 9; остальные докажете самостоятельно.

Пусть $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $z_2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z = x + iy$. Тогда равенство $z z_1 = z_2$ запишется так:

$$a + ib = (x + iy)(c + id) = xc - yd + i(xd + yc).$$

Отсюда имеем, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4)$$

Пример 2. Найти разность $z_1 - z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 7i \text{ и } z_2 = -1 + 3i.$$

Находим разность

$$z_1 - z_2 = (2 - 7i) - (-1 + 3i) = (2 - (-1)) + i(-7 - 3) = 3 - 10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1) + (-7)3}{1 + 9} + i \frac{-7(-1) - 2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{-23}{10} + \frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяется; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла.