Министерство образования Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Квадратные корни

Задание №3 для 8-х классов

(2003-2004 учебный год)

г. Долгопрудный, 2003

Составитель: Т.Х.Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: Задание №3 для 8-х классов (2003-2004 учебный год). - М.: МФТИ, 2003, 20 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 20 февраля 2004г.

Составитель:
Яковлева Тамара Харитоновна
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано в печать 17.12.03.
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л 1,25
Уч. - изд. л.1,11. Тираж 2400 экз. Заказ 10-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов.обл., г.Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел./факс (095) 408-5145 - **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 - **очно - заочное отделение**
E.mail : zftsh @ pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Введение

Дорогие ребята!

Вы получили очередное задание по математике. В этом учебном году вам предстоит познакомиться с квадратными уравнениями. Решение многих задач сводится к решению квадратных уравнений. Постарайтесь хорошо справиться с решениями задач этого задания, тогда вы сможете усвоить и следующее задание, в котором будут решаться квадратные уравнения.

§1. Определение арифметического квадратного корня

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть площадь квадрата равна 25. Требуется определить сторону квадрата. Если сторона квадрата равна x, то для нахождения длин сторон квадрата получаем уравнение $x^2 = 25$. Этому уравнению удовлетворяют два числа: 5 и -5. Эти числа называют квадратными корнями числа 25. Заметим, что один корень является положительным, а второй корень является отрицательным числом.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Обозначают арифметический квадратный корень так: $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$; $\sqrt{0} = 0$.

Равенство $\sqrt{a} = b$ является верным, если выполняются два условия: 1) $b \ge 0$ и 2) $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла, т. к. квадрат любого неотрицательного числа – число неотрицательное. Поэтому выражения $\sqrt{-49}$ и $\sqrt{-3{,}5}$ не имеют смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = |a|$.

Докажем, что, действительно, $\sqrt{a^2} = |a|$. Если $a \ge 0$, то из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

Если же $a < 0$, то $-a > 0$. Поэтому $\sqrt{a^2} = -a$, т. к. $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$. Таким образом, арифметический корень $\sqrt{a^2}$ равен a, если $a \ge 0$ и равен $(-a)$, если $a < 0$, т. е. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{12{,}25} - 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}25}$; б) $\sqrt{(-9)^2}$; в) $\sqrt{-16{,}2}$.

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$, т. к. $3{,}5 > 0$ и $3{,}5^2 = 12{,}25$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, т. к. $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^2 = 0{,}25$. Получаем: $2 \cdot 3{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 7 - 0{,}5 = 6{,}95$.

б) $\sqrt{(-9)^2} = 9$, т. к. $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Пример 2. При каких x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$; б) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$?

а) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено, если $x-1\geq 0,$ т. е. при $x\geq 1.$ Но так как $\sqrt{x-1}$ стоит в знаменателе, то данное выражение определено, если $x>1.$

б) Выражение $\sqrt{x}$ определено при $x\geq 0,$ а выражение $\sqrt{x+2}$ определено при $x+2\geq 0, x\geq -2.$ Таким образом, при $x\geq 0$ определены оба корня. При таких x имеем: $\sqrt{x}\geq 0$ и $\sqrt{x+2}>0,$ поэтому знаменатель при $x\geq 0$ не обращается в нуль, значит, при $x\geq 0$ данное выражение имеет смысл.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}+2=0,$ б) $\sqrt{x}-3=0,$ в) $\sqrt{5x+6}=6,$ г) $\sqrt{3x-7}=-5.$

а) Арифметический корень $\sqrt{x}$ определен при $x\geq 0,$ при этом $\sqrt{x}\geq 0,$ значит, при любом $x\geq 0$ выражение $\sqrt{x}+2\geq 2,$ поэтому данное уравнение не имеет решений.

б) $\sqrt{x}=3,$ из определения арифметического корня следует, что $\left(\sqrt{x}\right)^2=x=9,$ т. е. $x=9$ является корнем уравнения.

в) Предположим, что данное уравнение имеет решение, тогда $\left(\sqrt{5x+6}\right)^2=5x+6=6^2.$ Отсюда уже видно, что $5x+6>0,$ т. е. выражение $\sqrt{5x+6}$ определено. Решаем уравнение: $5x+6=36,$ $5x=30,$ $x=6.$

г) Уравнение не имеет смысла, т. к. арифметический корень из неотрицательного числа – число неотрицательное, а число $-5<0.$

§2. Уравнение $x^2 = a$

Если $a<0,$ то уравнение $x^2=a$ не имеет решений. Если $a=0,$ то уравнение имеет единственное решение $x=a.$ Рассмотрим теперь уравнение $x^2=a$ при $a>0.$

Рассмотрим графики функций $y=x^2$ и $y=a.$ Если $a=1,$ то уравнение $x^2=1$ имеет два корня: 1 и $-1.$ Если $a=4,$ то уравнение $x^2=4$ имеет два корня: 2 и $-2.$ Один из корней совпадает с арифметическим корнем из числа $4,$ а второй корень – число, противоположное первому корню.

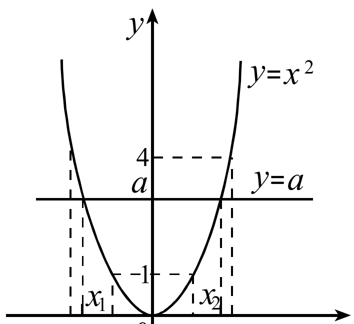


Рис. 1

Рассмотрим теперь уравнение $x^2=2.$ В первом задании мы уже говорили о том, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Арифметический корень $\sqrt{2}$ является числом иррациональным.

Пример 1. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является числом иррациональным.

Δ Предположим, что $\sqrt{7}$ является числом рациональным, т. е. $\sqrt{7} = \dfrac{m}{n}$, где n – натуральное число, m – целое число, и дробь $\dfrac{m}{n}$ – несократимая дробь. Из определения арифметического корня следует, что m должно быть также натуральным числом. Тогда $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 = = \dfrac{m^2}{n^2}$, $7n^2 = m^2$. Левая часть полученного выражения делится на 7, тогда и m^2 делится на 7, т. е. m делится на 7, тогда $m = 7k$, $7n^2 = 49k^2, n^2 = 7k^2$. Отсюда следует, что число n делится на 7, но тогда дробь $\dfrac{m}{n}$ является сократимой дробью, что противоречит условию. Следовательно, число $\sqrt{7}$ является иррациональным. ▲

Из рисунка 1 следует, что если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Поэтому, например, $\sqrt{119} > \sqrt{80}$; $\sqrt{2{,}37} > \sqrt{1{,}5}$.

Пример 2. Сравните числа $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \dfrac{1}{2}\sqrt{47}$.

Δ Из определения арифметического корня следует, что $a^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $b^2 = \dfrac{1}{4} \cdot 47 = 11\dfrac{3}{4}$. Так как $12 > 11\dfrac{3}{4}$, то число $a > b$. ▲

Пример 3. Найдите значение выражения:

$\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}.$

Δ $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$, $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 \cdot 3 = 6.$

Получаем: $3 - 5 \cdot 3 + 6 = -6.$

Пример 4. Между какими соседними натуральными числами расположено число $a = \dfrac{1}{3}\sqrt{209}$.

Δ $a^2 = \left(\dfrac{1}{3}\sqrt{209}\right)^2 = \dfrac{1}{9} \cdot 209 = 23\dfrac{2}{3}$. Заметим, что $16 < 23\dfrac{2}{3} < 25$, поэтому $\sqrt{16} < a < \sqrt{25}$, т. е. $4 < a < 5$. ▲

§3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Теорема 2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения (без микрокалькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175}$; б) $\sqrt{5\dfrac{11}{49}}$; в) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}$;

г) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$; д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}$.

Δ а) $\sqrt{5\cdot 35\cdot 175}=\sqrt{175\cdot 175}=175.$

б) $\sqrt{5\frac{11}{49}}=\sqrt{\frac{256}{49}}=\frac{16}{7}.$

в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}=\sqrt{\frac{75}{192}}=\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}.$

г) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}=\sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}}=\sqrt{\frac{73\cdot 225}{73\cdot 841}}=$

$=\sqrt{\frac{225}{841}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}}=\frac{15}{29}.$

д) $\sqrt{16^3\cdot 4^4}=\sqrt{\left(4^2\right)^3\cdot 4^4}=\sqrt{4^6\cdot 4^4}=\sqrt{4^{10}}=\sqrt{\left(4^5\right)^2}=4^5.$

Можно решать и другим способом.

$$\sqrt{16^3\cdot 4^4}=\sqrt{16^2\cdot 16\cdot 4^4}=\sqrt{16^2}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{\left(4^2\right)^2}=16\cdot 4\cdot 4^2=$$
$$=4^2\cdot 4\cdot 4^2=4^5.\ \blacktriangle$$

Рассмотрим $\sqrt{48}$. Преобразуем это выражение: $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=$ $=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$

В этом случае мы говорим, что множитель 4 вынесли из под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$$5\sqrt{7}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{175}.$$

В этом случае говорим, что множитель 5 внесли под знак корня.

Пример 2. Вынесите множитель из под знака корня:

а) $\sqrt{\left(5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5}$;

в) $-\sqrt{-a^4b^{11}}$; г) $\sqrt{21(xy)^2}$, если $xy\le 0$.

Δ Так как $\sqrt{a^2}=|a|$, то $\sqrt{\left(5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right)^2}=\left|5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right|.$

Определим знак числа $5\sqrt{13}4-\sqrt{19}$. Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $\left(5\sqrt{13}\right)^2=25\cdot 13=325$ и $\left(4\sqrt{19}\right)^2=16\cdot 19=304$. Так как $304<325$, то $\sqrt{304}<\sqrt{325}$, т. е.

$$5\sqrt{13}>4\sqrt{19},\ \text{поэтому}\ \left|5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right|=5\sqrt{13}-4\sqrt{19}.$$

б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5}=$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^2\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^4\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=$$
$$=\left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$$

Число $\sqrt{7}<\sqrt{11}$, т. к. $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$, $\left(\sqrt{11}\right)^2=11$ и $7<11$. Поэтому

$$\sqrt{7}-\sqrt{11}<0,\ \text{т. е.}\ \left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|=\sqrt{11}-\sqrt{7}.$$

Окончательно получаем: $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$

в) Так как $a^4\ge 0$, то корень определен, если $-b^{11}\ge 0$, т. е. $b^{11}\le 0, b\le 0.$

$-\sqrt{a^4\left(-b^5\right)^2(-b)} = -a^2\left(-b^5\right)\sqrt{-b} = a^2b^5\sqrt{-b}.$

г) $\sqrt{21(xy)^2} = |xy|\sqrt{21} = -xy\sqrt{21}.$ ▲

Пример 3. Внесите множитель под знак корня:

а) $\left(5-\sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2}+3}$; б) $(2a-1)\sqrt{1-2a}$; в) $-3xy\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$.

Δ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2} = |a|$.

а) Число $5-\sqrt{37}<0$, т. к. $5^2=25$, $\left(\sqrt{37}\right)^2=37$ и $25<37$. Поэтому

$$\left(5-\sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2}+3} = -\left(\sqrt{37}-5\right)\sqrt{\sqrt{2}+3} = -\sqrt{\left(\sqrt{37}-5\right)^2\left(\sqrt{2}+3\right)}.$$

б) Корень $\sqrt{1-2a}$ определен, если $1-2a\ge 0$, $2a\le 1$, $a\le\dfrac{1}{2}$. При таких a выражение $2a-1<0$. Поэтому

$$(2a-1)\sqrt{1-2a} = -(1-2a)\sqrt{1-2a} = -\sqrt{(1-2a)^2(1-2a)} = -\sqrt{(1-2a)^3}.$$

Корень $\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$ определен, если $xy<0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = 3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = \sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)} = \sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

Пример 4. Сравните числа a и b:

а) $a=\sqrt{3}+\sqrt{11}$ и $b=\sqrt{6}+\sqrt{8}$;

б) $a=2-\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $a=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}-\dfrac{2}{5-3\sqrt{3}}$ и $b=\sqrt{110}$.

Δ а) Числа a и b положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{11}+11=14+2\sqrt{33}$, $b^2=6+2\sqrt{6}\sqrt{8}+8=$ $=14+2\sqrt{48}$. Так как $48>33$, то $\sqrt{48}>\sqrt{33}$, $2\sqrt{48}>2\sqrt{33}$, поэтому $b^2>a^2$ и $b>a$.

б) Число $a>0$, т. к. $2^2>\left(\sqrt{3}\right)^2=3$. Число $7-4\sqrt{3}>0$, т. к. $7^2>\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$. Число b определено и оно больше нуля.

Следовательно, оба числа a и b положительные. Рассмотрим их квадраты. $a^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$, $b^2=7-4\sqrt{3}$. Следовательно, $a=b$.

в) $a=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}-\dfrac{2}{5-3\sqrt{3}}$.

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{10-6\sqrt{3}-10-6\sqrt{3}}{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(5-3\sqrt{3}\right)} = \frac{-12\sqrt{3}}{25-9\cdot 3} = -\frac{12\sqrt{3}}{-2} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}.$$

Так как $110>108$, то $\sqrt{110}>\sqrt{108}$, поэтому $b>a$.

Пример 5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; á) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

Δ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$, получаем:

$$\frac{2\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{45-49}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}$, получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}{\left(\left(3-\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}=$

$$=\frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\left(9+2-6\sqrt{2}\right)-5}=\frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{6\left(1-\sqrt{2}\right)}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{2}$, получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)}{6(1-2)}=$

$$=-\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4-\sqrt{5}-\sqrt{10}-\sqrt{10}-\sqrt{20}}{6}=$$

$$=-\frac{5+3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{6}.$$

§4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Покажем на примере, как можно тождественными преобразованиями упрощать выражения, содержащие квадратные корни. При этом мы будем пользоваться правилами, которые указали в предыдущем параграфе, как, например, правило произведения корней, правило деления корней, правило вынесения множителя из-под знака корня и т. д.

Пример 1. Упростите выражение $5\sqrt{18}+7\sqrt{50}-30\sqrt{2}$.

Δ Заметим, что $5\sqrt{18}=5\sqrt{9\cdot 2}=5\sqrt{9}\sqrt{2}=15\sqrt{2}$ и $7\sqrt{50}=$ $=7\sqrt{25\cdot 2}=7\sqrt{25}\sqrt{2}=35\sqrt{2}$.

В итоге получаем $15\sqrt{2}+35\sqrt{2}-30\sqrt{2}=20\sqrt{2}$.

Пример 2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}$.

Δ а) Заметим, что $7=4+3=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, тогда

$7+4\sqrt{3}=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$. Поэтому

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}$.

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=$
$=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1.$

в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}=\sqrt{(a-3)+4+4\sqrt{a-3}}=$
$=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}\right)^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{a-3}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}+2\right)^2}=\sqrt{a-3}+2.$

Пример 3. Сократите дроби:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{7a}-\sqrt{7b}}$; б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}$; г) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Δ а) Заметим,
что $a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2$, $\sqrt{7a}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{a}$, $\sqrt{7b}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{b}$,
подставляем эти выражения в данную дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{7}\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{7}}.$$

б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}\right)^2-\left(7\sqrt{b}\right)^2}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}-7\sqrt{b}\right)\left(8\sqrt{a}+7\sqrt{b}\right)}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=$
$=8\sqrt{a}+7\sqrt{b}.$

в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2+\left(\sqrt{3y}\right)^2+2\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt{3y}}=$

$$=\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3y}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}.$$

г) Преобразуем числитель дроби:
$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^2\sqrt{a}-\left(\sqrt{b}\right)^2\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=$
$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right).$

В результате получаем: $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a+b+\sqrt{ab}.$

Пример 4. Докажите тождество:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=-1.$$

Δ Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}=\frac{\sqrt{m}}{\left(\sqrt{n}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{m}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}-\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\left(\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{-\sqrt{nm}}.$$ Тождество доказано.

Пример 5. Решите уравнение.

$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=4.$ Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{4\left(x^2+4x+4\right)}-\sqrt{(x-3)^2}=$$

$$=\sqrt{4}\cdot\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}=2|x+2|-|x-3|.$$ После тождественных преобразований получили уравнение $2|x+2|-|x-3|=4.$

1) Пусть $x\ge 3$, тогда $|x-3|=x-3, |x+2|=x+2,$ наше уравнение сводится к уравнению

$$2(x+2)-(x-3)=4;\ \ 2x+4-x+3=4;\ \ x+3=0;\ \ x=-3,$$

но это число меньше 3.

2) Пусть теперь $-2<x<3,$ тогда $|x-3|=3-x, |x+2|=x+2,$ получаем уравнение: $2x+4+x-3=4, 3x=3, x=1.$ Число 1 удовлетворяет условию $-2<1<3.$

3) Пусть $x\le -2,$ тогда $|x-3|=3-x, |x+2|=-x-2,$ приходим к уравнению: $-2x-4-3+x=4, -x=11, x=-11.$ Число $-11<-2.$

Ответ. $1;-11.$

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\sqrt{x+3}-2\sqrt{y-2}=3,\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=9.\end{cases}$$

Корень $\sqrt{x+3}$ определен при $x\ge -3,$ а корень $\sqrt{y-2}$ определен при $y\ge 2.$

Умножим второе уравнение системы на 2 и прибавим к первому уравнению, получаем: $7\sqrt{x+3}=21,$ $\sqrt{x+3}=3,$ $x+3=9,$ $x=6.$ Подставляем это значение для x в первое уравнение, получаем:

$$3\cdot 3-2\sqrt{y-2}=3;\quad 6=2\sqrt{y-2};\quad \sqrt{y-2}=3;\quad y-2=9;\quad y=11.$$

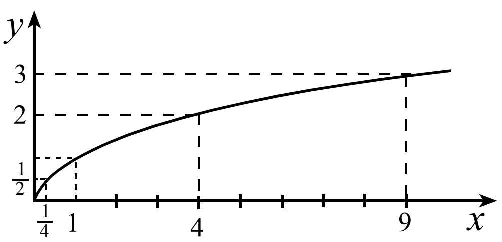
Ответ: $(6;11).$

§5. Построение графиков функций

В школьном курсе 7-го класса вы уже рассматривали графики линейной функции $y=kx+b,$ графики функций $y=x^2$ и $y=x^3.$ В этом году вы познакомились с еще одной функцией, а именно, с функцией $y=\sqrt{x}.$ Составим таблицу значений этой функции, очевидно, что она определена при $x\ge 0.$

x	0	1/16	1/9	1/4	1	4	9
y	0	1/4	1/3	1/2	1	2	3

Построим график этой функции.



Пример 1. Постройте графики функций:

а) $y=\sqrt{x^2}$; б) $y=-\sqrt{-x}$; в) $y=\sqrt{x+1}$; г) $y=\sqrt{|x+1|}$;

д) $y=\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}$; е) $y=\left(-\sqrt{x}\right)^2$.

Δ а) Из определения арифметического корня следует, что

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, \text{ если } x\ge 0,\\ -x, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

График данной функции приведен на рис. 2.

б) Из определения корня следует, что $-x\ge 0$, т.е. $x\le 0$. Составим таблицу значений функции.

x	0	-1/16	-1/4	-1	-4	-9
y	0	-1/4	-1/2	-1	-2	-3

График функции изображен на рис. 3.

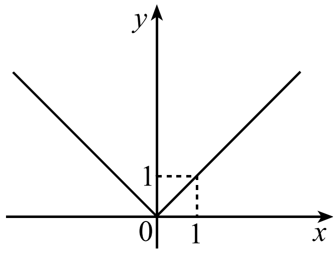


Рис. 2

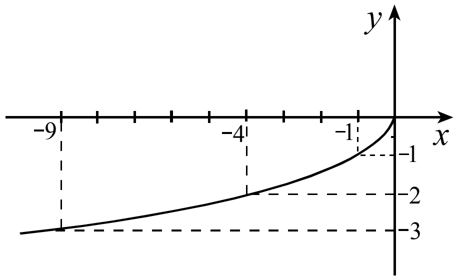


Рис. 3

в) Данная функция определена при $x+1\ge 0, x\ge -1$. При $x=-1, y=0$, при $x=3, y=2$, при $x=8, y=3$. График данной функции получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ параллельным сдвигом вдоль оси Ox на одну единицу влево. Приводим график данной функции на рис. 4.

Рис. 4

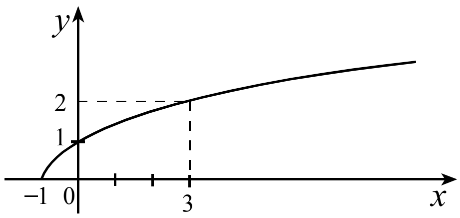
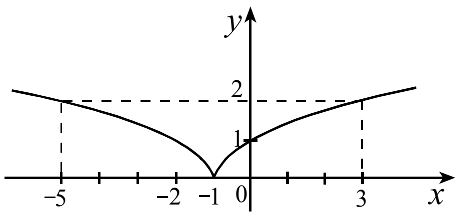


Рис. 5



г) Данная функция определена при всех x. При $x\ge -1$ выражение $|x+1|=x+1$ поэтому график данной функции совпадает с графиком функции $y=\sqrt{x+1}$, который мы привели на рис. 4. При $x\le -1$ данная функция определена, при этом $y=\sqrt{-x-1}$. Заметим, что данная функция в точках, симметричных относительно точки (-1), принимает равные значения. Например, при $x=0$ и $x=-2$ значения функции совпадают и равны 1. В точках 3 и (-5) значения функции также совпадают и равны 2. Про график данной функции говорят так: график функции симметричен относительно прямой $x=-1$. График данной функции приведен на рис. 5.

д) Преобразуем выражение, которым задается наша функция.

$$y=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+1)^2}=|x-2|-|x+1|.$$

При $x\ge 2$ $\quad y=x-2-x-1=-3.$

При $-1 < x < 2 \quad y = -x + 2 - x - 1 = -2x + 1.$

При $x \le -1 \quad y = -x + 2 + x + 1 = 3.$

График функции изображен на рис. 6.

е) Данная функция определена при $x \ge 0$. Для этих значений $y = \left(-\sqrt{x}\right)^2 = x.$ График функции приведен на рис. 7.

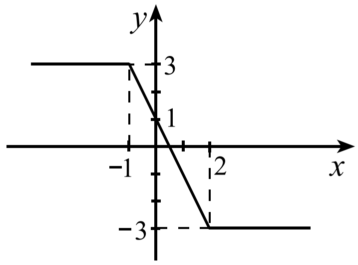


Рис. 6

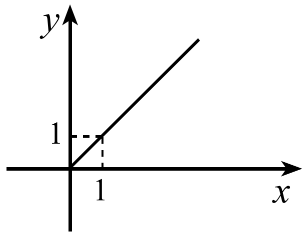


Рис. 7

Пример 2. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 3 - \sqrt{-x}, \text{если } x \le 0; \\ 3 - \dfrac{5}{2}x, \text{если } 0 < x < 2; \\ \sqrt{x-2} - 2, \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Δ На рис.3 в предыдущем примере мы строили график функции $y = -\sqrt{-x}$. Значения данной функции при $x \le 0$ получается из значений функции $y = -\sqrt{x}$ прибавлением числа 3, т.е. график функции $y = 3 - \sqrt{-x}$ получается из графика функции $y = -\sqrt{-x}$ сдвигом параллельно оси Oy на 3 единицы вверх.

Рассмотрим функцию $y = 3 - \dfrac{5}{2}x.$ Ее графиком является прямая, проходящая через точки $(0;3)$ и $(2;-2)$. График данной функции при $0 < x < 2$ совпадает с графиком прямой $y = 3 - \dfrac{5}{2}x.$ При $x \ge 2$ можно сначала построить график функции $y = \sqrt{x-2}$, а затем сдвинуть на 2 единицы вниз параллельно оси Oy. Составим таблицу значений функции

x	-9	-1	0	2	6
y	0	1	3	-2	0

График функции приведен на рис. 8.

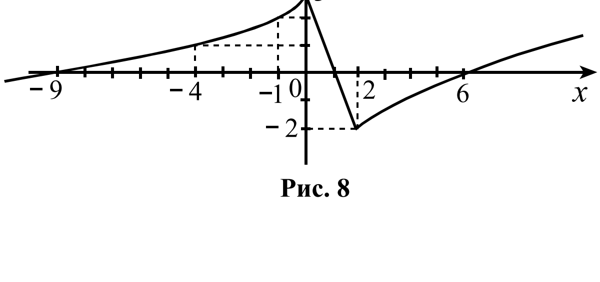


Рис. 8

Контрольные вопросы

1(1). Укажите, какие из ниже перечисленных чисел являются рациональными, а какие иррациональными:

$$0{,}3(1);\ \frac{2}{19};\ \sqrt{13};\ \sqrt{50};\ 1{,}03.$$

2(2). Докажите, что число $\sqrt{11}$ является иррациональным числом.

3(1). При каких x имеет смысл выражение:

$$\text{а) } \frac{3x+1}{\sqrt{x+1}};\quad \text{б) } \frac{2x+3}{x\sqrt{x+3}};\quad \text{в) } \frac{\sqrt{x-5}}{3+\sqrt{-10-x}}.$$

4(2). Решите уравнения:

$$\text{а) } \sqrt{x}-2=0,\quad \text{б) } \sqrt{x}+10=0,\quad \text{â) } \sqrt{2x-1}=3.$$

5(1). Сравните числа $a=\frac{1}{5}\sqrt{129}$ и $b=\frac{1}{7}\sqrt{253}$.

6(1). Между какими соседними натуральными числами расположено число $a=\frac{7}{9}\sqrt{31}$?

7(1). Докажите, что $\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^2=10-2\sqrt{21}$. Следует ли из этого, что $\sqrt{3}-\sqrt{7}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}$?

8(1). Докажите, что выражение $\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ равно натуральному числу.

9(3). Упростите:

$$\text{а) } \sqrt{63}-3\sqrt{1{,}75}-0{,}5\sqrt{343}+\sqrt{112};$$

$$\text{б) } \left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(9+4\sqrt{5}\right)-2\sqrt{5\frac{4}{9}};$$

$$\text{в) } \frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}-\left(11-5\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right);$$

$$\text{г) } \left(2\sqrt{2}+3\right)\sqrt{17-12\sqrt{2}}.$$

10(2). Сократите дроби:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\quad \text{б) } \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2};\quad \text{в) } \frac{4a-4\sqrt{3}}{3-a^2}.$$

11(2). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-3}+3\sqrt{y+2}=18, \\ 4\sqrt{x-3}-\sqrt{y+2}=8. \end{cases}$$

12(2). Построить графики функций:

$$\text{а) } y=\sqrt{(x-1)^2}+2;\quad \text{б) } y=x+\frac{2\sqrt{x^2}}{x}.$$

Задачи

1(1). Расположите числа в порядке возрастания:

$$9\sqrt{3}-3\sqrt{27};\ 5\sqrt{3};\ 2\sqrt{19};\ \sqrt{31}+\sqrt{30};\ \sqrt{7}-4.$$

2(2). Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ является иррациональным числом.

3(1). а) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых число рациональное.

б) Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых число рациональное.

4(1). Сравните числа:

$$a=\sqrt{17}-\sqrt{15} \quad \text{и} \quad b=\sqrt{7}-\sqrt{5}.$$

5(1). При каких x определено выражение $\sqrt{x+7}+\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}\cdot\dfrac{13}{x}$?

6(2). Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{32a^3b^{10}}$ при $b\le 0$; б) $\sqrt{-8c^7b^3}$ при $c<0; b>0$;

в) $-\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)^3\left(3-\sqrt{11}\right)^5}$; г) $\sqrt{\dfrac{-1}{(b-a)^3}}$.

7(2). Внесите множитель под знак корня:

а) $(3-a)\sqrt{\dfrac{1}{a-3}}$; б) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{13}\right)\sqrt{2}$; в) $x^3y^5\sqrt{-5xy}$.

8(2). Решите уравнение:

а) $\dfrac{3\sqrt{x-3}-4}{1+\sqrt{x-3}}=2$; б) $\sqrt{7x+11}=5$; в) $\left(7-2\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)=3-2x$.

г) $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{9x^2-30x+25}$.

9(2). Упростите:

а) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

10(1). Докажите, что число $2-\sqrt{3}$ является корнем уравнения

$$x^3-5x^2+5x-1=0.$$

11(3). Упростите выражения:

а) $\dfrac{\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a}{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4a}}\right)$.

12(2). Докажите тождество:

$$\frac{\sqrt{z}-2}{4z-16\sqrt{z}+16}:\left(\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{z}-4}-\frac{z-12}{2z-8}-\frac{2}{z+2\sqrt{z}}\right)=\frac{\sqrt{z}}{4\left(\sqrt{z}+2\right)}.$$

13(6). Постройте графики функций:

а) $y=-\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{x-1}-2$; в) $y=2-\sqrt{x+3}$;

г) $y=\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}$; д) $y=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x-1)x}$;

е) $y = \begin{cases} 2 - \sqrt{-x}, \text{если } x \le -1; \\ x^2, \text{если } -1 < x < 2; \\ \dfrac{8}{x}, \text{если } x \ge 2. \end{cases}$

