

#### §4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Покажем на примере, как можно тождественными преобразованиями упрощать выражения, содержащие квадратные корни. При этом мы будем пользоваться правилами, которые указали в предыдущем параграфе, как, например, правило произведения корней, правило деления корней, правило вынесения множителя из-под знака корня и т. д.

**Пример 1.** Упростите выражение  $5\sqrt{18} + 7\sqrt{50} - 30\sqrt{2}$ .

$$\Delta \text{ Заметим, что } 5\sqrt{18} = 5\sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{2} \quad \text{и} \quad 7\sqrt{50} = 7\sqrt{25 \cdot 2} = 7\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 35\sqrt{2}.$$

В итоге получаем  $15\sqrt{2} + 35\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ .

**Пример 2.** Упростите выражение:

$$\text{а) } \sqrt{7+4\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \sqrt{3-2\sqrt{2}}; \quad \text{в) } \sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}.$$

$\Delta$  а) Заметим, что  $7 = 4 + 3 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$ , тогда

$$7 + 4\sqrt{3} = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2. \text{ Поэтому}$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}.$$

$$\text{б) } \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1+2-2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1.$$

$$\text{в) } \sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}} = \sqrt{(a-3)+4+4\sqrt{a-3}} = \sqrt{(\sqrt{a-3})^2+2^2+2 \cdot 2 \cdot \sqrt{a-3}} = \sqrt{(\sqrt{a-3}+2)^2} = \sqrt{a-3}+2.$$

**Пример 3.** Сократите дроби:

$$\text{а) } \frac{a-b}{\sqrt{7a}-\sqrt{7b}}; \quad \text{б) } \frac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}; \quad \text{г) } \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

$\Delta$  а) Заметим,

$$\text{что } a-b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2, \quad \sqrt{7a} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{a}, \quad \sqrt{7b} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{b},$$

подставляем эти выражения в данную дробь:

$$\frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{7}\sqrt{a} - \sqrt{7}\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{7}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{б) } \frac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}} = \frac{(8\sqrt{a})^2 - (7\sqrt{b})^2}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}} = \frac{(8\sqrt{a}-7\sqrt{b})(8\sqrt{a}+7\sqrt{b})}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}} = 8\sqrt{a}+7\sqrt{b}.$$

$$\text{в) } \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{(\sqrt{3x})^2 + (\sqrt{3y})^2 + 2 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{3y}} = \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{(\sqrt{3x}+\sqrt{3y})^2} = \frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}.$$

г) Преобразуем числитель дроби:

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^2 \sqrt{a} - (\sqrt{b})^2 \sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 =$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \left( (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \right) = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) (a + b + \sqrt{ab}).$$

В результате получаем: 
$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + b + \sqrt{ab})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a + b + \sqrt{ab}.$$

**Пример 4.** Докажите тождество:

$$\left( \frac{\sqrt{m}}{n - \sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{n}}{m - \sqrt{mn}} \right) \cdot \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = -1.$$

Δ Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{m}}{n - \sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{n}}{m - \sqrt{mn}} &= \frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{n})^2 - \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{m})^2 - \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{m})} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{m})} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(\sqrt{n} - \sqrt{m})} = \\ &= \frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} - \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{m})} = \frac{(\sqrt{m})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{m})} = \\ &= \frac{(\sqrt{m} - \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m} \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{m})} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{-\sqrt{nm}}. \text{ Тождество доказано.} \end{aligned}$$

**Пример 5.** Решите уравнение.

$\sqrt{4x^2 + 16x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4.$  Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 16x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} &= \sqrt{4(x^2 + 4x + 4)} - \sqrt{(x - 3)^2} = \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{(x + 2)^2} - \sqrt{(x - 3)^2} = 2|x + 2| - |x - 3|. \end{aligned}$$

После тождественных преобразований получили уравнение  $2|x + 2| - |x - 3| = 4.$

1) Пусть  $x \geq 3$ , тогда  $|x - 3| = x - 3$ ,  $|x + 2| = x + 2$ , наше уравнение сводится к уравнению

$$2(x + 2) - (x - 3) = 4; \quad 2x + 4 - x + 3 = 4; \quad x + 3 = 0; \quad x = -3,$$

но это число меньше 3.

2) Пусть теперь  $-2 < x < 3$ , тогда  $|x - 3| = 3 - x$ ,  $|x + 2| = x + 2$ , получаем уравнение:  $2x + 4 + x - 3 = 4$ ,  $3x = 3$ ,  $x = 1$ . Число 1 удовлетворяет условию  $-2 < 1 < 3$ .

3) Пусть  $x \leq -2$ , тогда  $|x - 3| = 3 - x$ ,  $|x + 2| = -x - 2$ , приходим к уравнению:  $-2x - 4 - 3 + x = 4$ ,  $-x = 11$ ,  $x = -11$ . Число  $-11 < -2$ .

Ответ. 1; -11.

**Пример 6.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{y-2} = 3, \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y-2} = 9. \end{cases}$$

Корень  $\sqrt{x+3}$  определен при  $x \geq -3$ , а корень  $\sqrt{y-2}$  определен при  $y \geq 2$ .

Умножим второе уравнение системы на 2 и прибавим к первому уравнению, получаем:  $7\sqrt{x+3} = 21$ ,  $\sqrt{x+3} = 3$ ,  $x+3 = 9$ ,  $x = 6$ . Подставляем это значение для  $x$  в первое уравнение, получаем:

$$3 \cdot 3 - 2\sqrt{y-2} = 3; \quad 6 = 2\sqrt{y-2}; \quad \sqrt{y-2} = 3; \quad y - 2 = 9; \quad y = 11.$$

Ответ: (6; 11).