§2. Уравнение $x^2 = a$

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет решений. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = a$. Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$.

Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = a$. Если $a = 1$, то уравнение $x^2 = 1$ имеет два корня: 1 и -1. Если $a = 4$, то уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня: 2 и -2. Один из корней совпадает с арифметическим корнем из числа 4, а второй корень – число, противоположное первому корню.

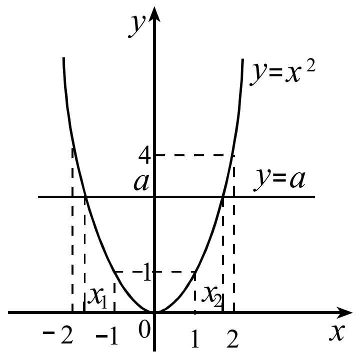

Рис. 1

Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = 2$.

В первом задании мы уже говорили о том, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Арифметический корень $\sqrt{2}$ является числом иррациональным.

Пример 1. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является числом иррациональным.

Δ Предположим, что $\sqrt{7}$ является числом рациональным, т. е. $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, где n – натуральное число, m – целое число, и дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Из определения арифметического корня следует, что m должно быть также натуральным числом. Тогда $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 = \frac{m^2}{n^2}$, $7n^2 = m^2$. Левая часть полученного выражения делится на 7, тогда и m^2 делится на 7, т. е. m делится на 7, тогда $m = 7k$, $7n^2 = 49k^2, n^2 = 7k^2$. Отсюда следует, что число n делится на 7, но тогда дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой дробью, что противоречит условию. Следовательно, число $\sqrt{7}$ является иррациональным. ▲

Из рисунка 1 следует, что если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Поэтому, например, $\sqrt{119} > \sqrt{80}$; $\sqrt{2{,}37} > \sqrt{1{,}5}$.

Пример 2. Сравните числа $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \frac{1}{2}\sqrt{47}$.

Δ Из определения арифметического корня следует, что $a^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $b^2 = \frac{1}{4} \cdot 47 = 11\frac{3}{4}$. Так как $12 > 11\frac{3}{4}$, то число $a > b$. ▲

Пример 3. Найдите значение выражения:

$\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.

Δ $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$, $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Получаем: $3 - 5 \cdot 3 + 6 = -6$.

Пример 4. Между какими соседними натуральными числами расположено число $a = \frac{1}{3}\sqrt{209}$.

Δ $a^2 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{209}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 209 = 23\frac{2}{3}$. Заметим, что $16 < 23\frac{2}{3} < 25$, поэтому $\sqrt{16} < a < \sqrt{25}$, т. е. $4 < a < 5$. ▲