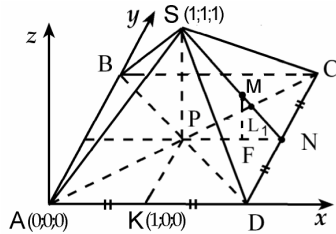


### § 3. Сфера и многоугольники

В прямоугольной системе координат сфера с центром в точке  $C(x_0, y_0, z_0)$  и радиусом  $R$  задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

**Задача 11.**  $SABCD$  — правильная четырехугольная пирамида. Найти радиус сферы, проходящей через вершину пирамиды  $S$ , середину ребра  $AD$ , точку  $M$  пересечения медиан грани  $CDS$  и вершину  $A$ , если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 1.



$\Delta B$  в основании пирамиды лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 2, вершина  $S$  проектируется в центр основания (рис. 16).

Рис. 16

Введем прямоугольную систему координат, выбрав начало координат в точке  $A$ , совместив ось  $x$  с прямой  $AD$ , а ось  $y$  — с прямой  $AB$ .

Предположим, что уравнение сферы в этой системе координат имеет уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (6)$$

Ему удовлетворяют координаты точек  $A(0;0;0)$ ,  $K(1;0;0)$  — середина стороны  $AD$ ,  $S(1;1;1)$  и точки  $M$  — точки пересечения медиан грани  $CDS$ . Если  $CN = DN$ , то  $SN$  — медиана треугольника  $CDS$  и  $MN = \frac{1}{3}SN$ . Пусть  $MF \parallel SP$ , тогда  $\Delta MNF \sim \Delta SNP$  и  $\frac{MF}{SP} = \frac{FN}{PN} = \frac{MN}{SN}$ , откуда  $FN = \frac{1}{3}PN = \frac{1}{3}$  и  $MF = \frac{1}{3}SP = \frac{1}{3}$ . Итак,  $M\left(\frac{5}{3}; 1; \frac{1}{3}\right)$ .

Подставим координаты точек  $A$ ,  $K$ ,  $S$  и  $M$  в уравнение (6), получим систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R_2; \\ (a - 1)^2 + b^2 + c^2 = R^2; \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = R^2; \\ \left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + (b - 1)^2 + \left(c - \frac{1}{3}\right)^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем  $a = \frac{1}{2}$ , вычитая из второго уравнения третье, получим  $b + c = 1$ , а вычитая из третьего четвертое и подставляя  $a = \frac{1}{2}$ , получим  $c = -\frac{1}{6}$ . Итак,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{7}{6}$ ,  $c = -\frac{1}{6}$ , из первого уравнения системы находим  $R = \frac{\sqrt{59}}{6}$ .  $\blacktriangle$

Следует отметить, однако, что достаточно просто координатным методом решаются лишь некоторые задачи, а в большинстве задач приходится геометрически определять положение центра.

**I. Сфера описана около многоугольника**, если она проходит через каждую его вершину (многогранник вписан в сферу). Центр такой сферы равноудален от вершин.

Каждое ребро многогранника – хорда описанной сферы, поэтому *центр описанной сферы – точка пересечения плоскостей, проходящих перпендикулярно ребрам через их середины.*

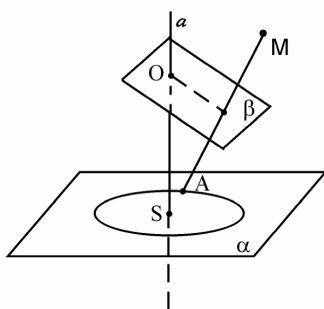


Рис. 17

Каждая грань вписанного многогранника вписана в окружность – сечение сферы плоскостью этой грани. Перпендикуляр из центра сферы на плоскость ее сечения проходит через центр окружности этого сечения.

Значит, *центр описанной сферы принадлежит всем перпендикулярам к граням, проведенным через центры*

*описанных вокруг них окружностей.*

*Если окружность лежит в плоскости  $\alpha$ , а точка  $M$  не принадлежит этой плоскости, то через эту окружность и точку  $M$  можно провести сферу.*

Геометрическим местом точек, равноудаленных от всех точек окружности, есть прямая  $a$ , проходящая через центр окружности (рис.17).

Геометрическое место точек, равноудаленных от точки  $M$  и некоторой точки  $A$  окружности, есть плоскость  $\beta$ , перпендикулярная отрезку  $MA$  и проходящая через его середину.

Прямая  $a$  и плоскость  $\beta$  не параллельны (иначе точка  $M$  лежала бы в плоскости  $\alpha$ ), они пересекаются. Их точка пересечения – точка  $O$  – равноудалена и от точки  $M$ , и от всех точек окружности.

Отсюда следует, что *около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность, в частности*

- около любой треугольной пирамиды можно описать сферу,*
- около правильной пирамиды можно описать сферу.*

**Задача 12.** В основании тетраэдра  $ABCD$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , угол  $C$  прямой, ребро  $DA$  перпендикулярно плоскости  $ABC$  (рис. 18). Найти радиус описанной около этого тетраэдра сферы, если  $AD = BC = 3$ ,  $AC = 4$ .

Центр сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ , лежит на прямой  $a$ , перпендикулярной основанию  $ABC$  и проходящей через центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Так как  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $AB$  – диаметр этой окружности, и центр ее – точка  $O$  – середина гипотенузы  $AB$ .

Центр сферы, проходящей через точки  $A$  и  $D$  лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка  $AD$  перпендикулярно ему. Легко видеть, что эта плоскость и прямая  $a$  пересекается в середине ребра  $BD$  – точке  $P$ . Точка  $P$  – центр сферы, ее радиус  $R$  равен  $\frac{1}{2}BD$ . Находим:  $BD^2 = AD^2 + AB^2 =$

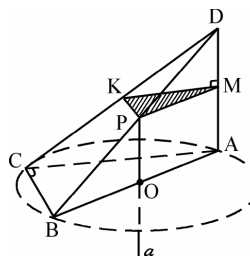


Рис. 18

$$= AD^2 + (AC^2 + BC^2) = 34, \text{ значит, } R = \frac{\sqrt{34}}{2}. \blacktriangle$$

**Задача 13.** В тетраэдре  $ABCD$  ребро  $AC$  равно 6, ребро  $BD$  равно 8,

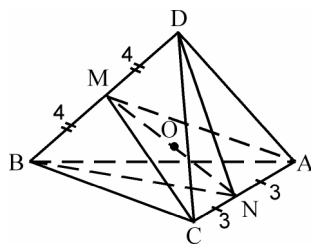


Рис. 19

все остальные ребра равны  $\sqrt{74}$  (рис. 19). Найти радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

Пусть  $M$  и  $N$  – середины противоположных – равные равнобедренные с основанием  $AC$ , поэтому  $AC \perp BN$ ,  $AC \perp DN$ . Отсюда следует, что плоскость  $BND$  перпендикулярна

ребру  $AC$  и проходит через его середину, центр описанной сферы лежит в плоскости  $BND$ .

Треугольники  $BCD$  и  $BAD$  также равные равнобедренные с общим основанием, поэтому  $CM \perp BD$ ,  $AM \perp BD$ , и плоскость  $CMA$  перпендикулярна ребру  $BD$  и проходит через его середину. Центр описанной сферы лежит в этой плоскости.

Плоскости  $BND$  и  $CMA$  пересекаются по прямой  $MN$ , центр  $O$  сферы лежит на этой прямой. Находим:

$$BN = ND = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{65},$$

$$MN = \sqrt{AN^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 7.$$

Из прямоугольного треугольника  $MOD$  имеем:  $MO = \sqrt{R^2 - MD^2} = \sqrt{R^2 - 16}$ , а из прямоугольного треугольника  $NOC$ :  $ON = \sqrt{R^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - 9}$ , тогда из  $MN = MO + ON$  следует  $\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7$ . Решая уравнение, находим  $R = 5$ .

Предположение о том, что точка  $O$  лежит не на отрезке  $MN$ , а на прямой  $MN$  вне его, приводит к одному из уравнений:

$$\sqrt{R^2 - 16} - \sqrt{R^2 - 9} = 7, \text{ либо } \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = 7.$$

Первое из них не имеет смысла ( $\sqrt{R^2 - 16} < \sqrt{R^2 - 9}$ ), а второе не имеет решений.  $\blacktriangle$

**II. Биссектором двугранного угла называется полуплоскость, которая принадлежит этому углу, имеет границей его ребро и разделяет угол на два двугранных угла равной величины.**

Будем рассматривать углы меньше развернутого.

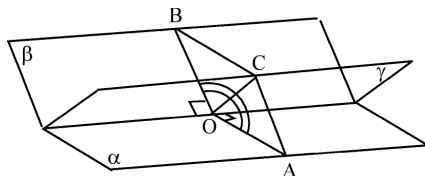


Рис. 20

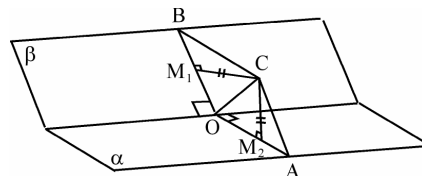


Рис. 21

Биссектриса каждого линейного угла данного двугранного угла принадлежит его биссектору (на рис. 20 биссектор  $\gamma$  содержит биссектрису  $OC$  линейного угла  $AOB$ ). Правило построения биссектора: через ребро угла и биссектрису его линейного угла.

Как и у биссектрисы плоского угла, точки биссектора обладают свойством равноудаленности от граней двугранного угла.

*Биссектор двугранного угла есть геометрическое место точек внутри этого угла, равноудаленных от плоскостей его граней* (рис.21).

**III. Сфера вписана в многогранник**, если она касается всех его граней. *Центр вписанной сферы равноудален от всех плоскостей граней на расстояние, равное радиусу.*

Следовательно, *центр вписанной сферы принадлежит биссекторам всех двугранных углов многогранника*. Обратно, если существует точка  $O$ , общая всем биссекторам, лежащая внутри многогранника, и она удалена от граней на расстояние  $r$ , то сфера с центром в точке  $O$  и радиуса  $r$  касается всех граней многогранника.

*В любой тетраэдр можно вписать сферу и только одну.*

□ Пусть  $\beta_1$  – биссектор двугранного угла с ребром  $AC$ , а  $\beta_2$  – биссектор двугранного угла с ребром  $AB$  (рис. 22). Эти биссекторы имеют общую точку  $O$ , следовательно, пересекутся по некоторому лучу  $AK$ . Каждая точка этого луча лежит на  $\beta_1$  и

поэтому равноудалена от плоскостей  $ACB$  и  $ACD$ , лежит на  $\beta_2$  равноудалена от плоскостей  $ABC$  и  $ABD$ . Значит каждая точка луча  $AK$  равноудалена от трех граней:  $ABC$ ,  $ACD$  и  $ABD$  и луч  $AK$  принадлежит биссектору двугранного угла при ребре  $AD$ .

Пусть луч  $AK$  пересекает грань  $BCD$  в точке  $M$ . Концы отрезка  $AM$  принадлежат разным граням двугранного угла при ребре  $BC$ , поэтому биссектор этого угла пересекает отрезок  $AM$ . Точка пересечения  $O$  лежит на луче  $AK$  и равноудалена от граней  $ABC$ ,  $ACD$ ,

$ABD$ . В то же время расстояния от точки  $O$  до плоскостей  $ABC$  и  $BCD$  равны, так как точка  $O$  принадлежит биссектору двугранного угла, образованного этими плоскостями. Таким образом, точка  $O$  равноудалена от всех граней тетраэдра, принадлежит биссекторами всех двугранных углов тетраэдра и сфера с центром в точке  $O$  и радиусом, равным расстоянию от точки  $O$  до грани тетраэдра, вписана в тетраэдр. Точка  $O$  определяется единственным образом. ■

**Задача 14.** В основании тетраэдра  $ABCD$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , угол  $C$  прямой, ребро  $AD$  перпендикулярно плоскости  $ABC$  (рис. 23). Найти радиус вписанной сферы, если  $AD = BC = 3$ ,  $AC = 4$ .

Δ По теореме о трех перпендикулярах прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ACD$  (т. к.  $DA$  – перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , прямая  $BC$  перпендикулярна проекции  $AC$ , следовательно, она перпендикулярна наклонной  $DC$ ; итак,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $\angle BCS = 90^\circ$ , следовательно прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ACD$ ). Значит угол  $DCA$  – линейный угол двугранного угла при ребре  $BC$  и биссектор  $BCK$  проходит через биссектрису  $CK$  этого линейного угла. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе.

Далее угол  $BAC$  – линейный угол двугранного угла при ребре  $AD$ , проводим его биссектрису  $AL$ , а затем биссектор  $ADL$ . Центр вписанной

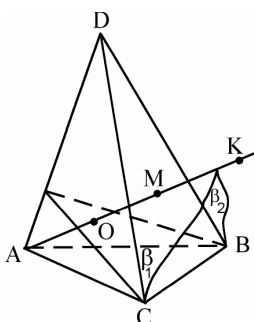


Рис. 22

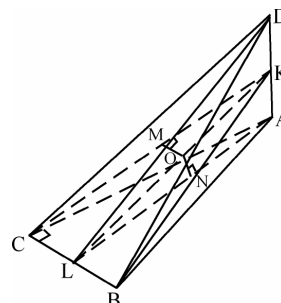


Рис. 23

сферы лежит на этом биссекторе, следовательно, центр сферы лежит на прямой  $LK$  пересечения биссекторов  $BCK$  и  $ADL$ .

Пусть  $O$  – центр сферы, точка  $O$  лежит на  $LK$ , расстояния от точки  $O$  до основания  $ABC$  и до грани  $ACD$  равны (тогда расстояния от точки  $O$  до всех граней будут равны).

Если  $ON \perp ABC$ , то  $ON \parallel DA$ , следовательно точка  $N$  лежит на  $AL$ .

Если  $OM \perp ACD$ , то  $OM \parallel BC$ , значит точка  $M$  лежит на  $CK$ . Итак,  $ON = OM$ .

Из условия следует, что  $\triangle CAD = \triangle ACB$ , поэтому равны их биссектрисы соответственных углов  $ACD$  и  $CAB$  и они отсекают на равных сторонах  $AD$  и  $BC$  равные отрезки  $AK = CL$ . Отсюда следует, что  $\triangle KCL = \triangle LAK$ . Значит,  $\angle CKL = \angle KLA$ . Из этого равенства и из равенства  $OM = ON$  следует, что  $\triangle MOK = \triangle NOL$ . Поэтому и  $OK = OL$ ,

т. е.  $MO = \frac{1}{2} CL$ .

Это и есть искомый радиус.

По свойству биссектрисы в треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AL$  делит сторону  $BC$  в отношении  $CL : BL = CA : BA = 4 : 5$ . Отсюда

$$CL = \frac{4}{9} BC = \frac{4}{3} \text{ и } MO = \frac{2}{3}.$$

**Второй способ.** Пусть  $O$  – центр сферы. Рассмотрим четыре пирамиды с общей вершиной  $O$  и – гранями тетраэдра:  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$ . Центр  $O$  одинаково удален от всех граней пирамиды на расстояние  $r$ , равное радиусу вписанной сферы, т. е. у всех этих пирамид одинаковая высота, равная  $r$ . Сумма объемов всех четырех пирамид составляет

$$\frac{1}{3} r (S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}) = \frac{1}{3} r S_n,$$

( $S_n$  — площадь полной поверхности пирамиды  $ABCD$ ) и равна объему  $V$  самой пирамиды  $ABCD$ , т. е.

$$V = \frac{1}{3} r S_n, \text{ откуда } r = \frac{3V}{S_n}.$$

Объем пирамиды может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3} AD \cdot S_{ABC}.$$

Имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 6, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{15}{2},$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD = 6, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BC = \frac{15}{2}.$$

Итак

$$S_n = 27, V = \frac{1}{3} AD \cdot S_{ABC} = 6, r = \frac{3V}{S_n} = \frac{2}{3}. \blacktriangle$$

**Замечание.** Формула  $r = \frac{3V}{S_n}$  верна для любого описанного вокруг

сферы радиуса  $r$  многогранника и пригодна для определения радиуса сферы.

*Прямая и сфера могут располагаться тремя способами.*

Пусть  $R$  – радиус сферы,  $OK$  – перпендикуляр из центра сферы на прямую  $a$ .

1) Прямая  $a$  не пересекает сферу, если  $OK > R$ .

2) Прямая  $a$  касается сферы, если  $OK = R$  (прямая проходит через конец радиуса на сфере и перпендикулярна этому радиусу).

3) Прямая пересекает сферу в двух точках, если  $OK < R$ .

Секущие и касательные к сфере обладают такими же свойствами, как и к окружности, в частности:

а) если две прямые пересекаются в точке  $S$ , и касаются сферы в точках  $K$  и  $L$ , то  $SK = SL$  (свойство касательных);

б) если две прямые пересекаются в точке  $S$ , одна касается сферы в точке  $K$ , другая пересекает сферу в точках  $M$  и  $N$ , то  $SK^2 = SM \cdot SN$  (теорема о касательной и секущей);

в) если две прямые пересекаются в точке  $S$ , одна из них пересекает сферу в точках  $M$  и  $N$ , другая – в точках  $P$  и  $Q$ , то  $SM \cdot SN = SP \cdot SQ$  (точка  $S$  может располагаться снаружи (**теорема о секущих**) или внутри сферы (**теорема о пересекающихся хордах**)).