Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Комплексные числа

Задание №6 для 11-х классов

(2010 – 2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2011

Составитель: С.Е. Городецкий, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №6 для 11-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2011, 27с.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Городецкий Сергей Евгеньевич
Подписано 16.02.11. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75.
Уч.-изд. л. 1,55. Тираж 1100. Заказ №6-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

e-mail: ***zftsh@mail.mipt.ru***

Наш сайт: www.school.mipt.ru

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2, ... n, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными на множестве натуральных чисел. Поэтому вводятся множества целых и рациональных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. *Комплексные числа.* Комплексными числами называют выражения вида $a+bi$, в которых a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ и для которых следующим образом вводятся понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ *равны* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$; (пишут $a+bi=c+di$)

б) *суммой* чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число
$$a+c+(b+d)i;$$
в) *произведением* чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число
$$ac-bd+(ad+bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам
$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i, \qquad (1)$$
$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i. \qquad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z=a+bi$ означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z, при этом действительное число a называется <u>действительной частью</u> комплексного числа $\left(z=a+bi\right)$ и обозначается $\operatorname{Re} z$; пишут $\operatorname{Re} z=a$; или $\operatorname{Re}\left(a+bi\right)=a$. Число b называется <u>мнимой частью</u> числа $z=a+bi$ и обозначается $\operatorname{Im} z$, пишут $\operatorname{Im} z=b$ или $\operatorname{Im}\left(a+bi\right)=b$. <u>Символ i</u> называется <u>мнимой единицей.</u>

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a+0i$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:
$$(a+0i)+(c+0i)=a+c+0i,$$

$$(a+0i)(c+0i)=(ac)+0i.$$

Таким образом, отождествив число $a+0i$ с действительным числом a, получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно $a=a+0i$. В частности, число $0=0+0i$ будем, как обычно, называть нулём, а число $1=1+i0$ – единицей.

Числа вида $0+bi$ называют чисто мнимыми и обозначаются bi : $0+7i=7i,\ 0-2i=-2i.$

На основании формулы (2) найдём значение выражения $i^2=ii$:

$$i^2=ii=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

Таким образом,

$$i^2=-1. \tag{3}$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т. к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a+bi$ и $c+di$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=8+3i$ и $z_2=-5+2i$. По формуле (1) находим

$$z_1+z_2=8-5+i(3+2)=3+5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8+3i)$ и $(-5+2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1z_2=(8+3i)(-5+2i)=-40-15i+16i+6i^2=-40+i-6=-46+i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*: $z_1+z_2=z_2+z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2.

2. *Ассоциативность сложения*: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

3. $z+0=z$ для любого комплексного числа z.

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается z_2-z_1.

5. *Коммутативность умножения*: $z_1z_2=z_2z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2.

6. *Ассоциативность умножения*: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

7. *Дистрибутивный закон*: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

8. $1\cdot z=z$ для любого комплексного числа z.

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2\neq 0$, существует число z такое, что $z_2z=z_1$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения. Докажем свойство 9; остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_2\neq 0$, т. е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z=x+yi$. Тогда равенство $zz_2=z_1$ запишется так: $a+bi=(x+yi)(c+di)=xc-yd+(xd+yc)i.$

Отсюда следует, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений: $\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases}$

Эта система имеет единственное решение

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \tag{4}$$

Пример 2. Найти разность z_1-z_2 и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1=2-7i \text{ и } z_2=-1+3i.$$

Находим разность

$$z_1-z_2=(2-7i)-(-1+3i)=(2-(-1))+i(-7-3)=3-10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2(-1)+(-7)3}{1+9}+i\frac{-7(-1)-2\cdot 3}{1+9}=\frac{-23}{10}+\frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются; записи вида $z>3+i$ и им подобные лишены всякого смысла. Невозможно перенести понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, если мы при этом хотим сохранить все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, что при умножении обеих частей неравенства на положительное число оно остается верным и т. п.). Например, покажем, что числа i и 0 сравнить невозможно.

Предположим, что $i>0.$ Тогда умножая обе части неравенства на i (по предположению $i>0,$ поэтому знак неравенства не меняем), получаем $i^2>0,$ т.е. $-1>0,$ что неверно. Предположим, что $i<0.$ Тогда, умножив обе части неравенства на $i,$ снова получим, что $i^2>0.$

Таким образом, сравнить числа i и 0 невозможно.

§2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. ***Комплексная плоскость.*** Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z=a+ib$ поставим в соответствие точку $M(a,b)$ координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z=a,$ а ордината равна $\operatorname{Im} z=b.$ Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z=a+ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т. к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a+i0$, т. е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0+bi.$

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a+bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a,b)$ соответствует комплексное число $a+bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0+0i.$

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости, позволяют называть комплексное число $z=a+bi$ точкой $a+bi$ или вектором $z=a+bi.$

2. ***Модуль комплексного числа.*** Перейдём к понятию модуля комплексного числа.

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой r. Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

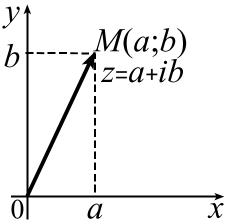


Рис. 1

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только в том случае, когда $z = 0 + 0i = 0$.

Пусть $z = a + bi$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* числу $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$: $\overline{z} = a - bi$ (см. рис. 2).

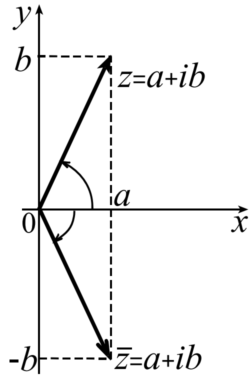


Рис. 2

Заметим, что $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1, $\overline{z}_2$ и к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4). Заметим также, что *сумма и произведение комплексных чисел z и $\overline{z}$ всегда является действительным числом.*

Пример 3. Найти частное $\dfrac{3 - 5i}{-1 + 10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3 - 5i}{-1 + 10i} = \frac{(3 - 5i)(-1 - 10i)}{(-1 + 10i)(-1 - 10i)} = \frac{-3 + 5i - 30i + 50i^2}{1 + 100} = -\frac{53}{101} - \frac{25}{101}i.$$

Заметим также, что выполняются соотношения:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \text{(а)}$$

$$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \qquad \text{(б)}$$

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}, \qquad \text{(в)}$$

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}, \qquad \text{(г)}$$

$$\overline{\left(z_1/z_2\right)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}. \qquad (д)$$

Докажем, например, (б). Пусть $z_1 = a + bi, z_2 = c + di.$ Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2};$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+2abcd+b^2c^2-2abcd+a^2d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)c^2+\left(a^2+b^2\right)d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Перейдём к равенству (г):

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \left(a-bi\right)\left(c-di\right) = ac-bd-\left(bc+ad\right)i;$

$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{\left(a+bi\right)\left(c+di\right)} = \overline{ac-bd+\left(bc+ad\right)i} = ac-bd-\left(bc+ad\right)i.$

3. ***Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.*** Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i.$ Им соответствуют векторы с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Тогда числу

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

будет соответствовать вектор с координатами $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2.

Аналогично, разности $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.

Модуль $|z_2 - z_1|$ разности двух комплексных чисел z_2 и z_1, по определению модуля, есть длина вектора $z_1 - z_2$. Построим этот вектор как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 3). Получим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

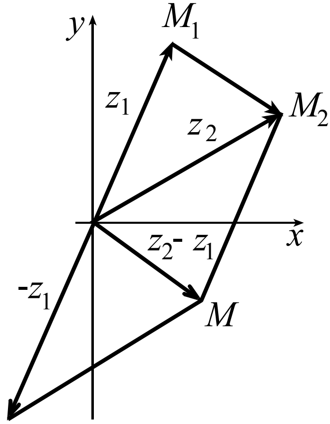


Рис. 3

Следовательно, $|z_2 - z_1|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть **модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.**

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: а) $|z-i|=1$, б) $1<|z+3+i|<3$,

в) $|z-1|<|z+1|$; г) $|z-1|=2|z+2|$.

а) Условию $|z-i|=1$ удовлетворяют те и только те точки z комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

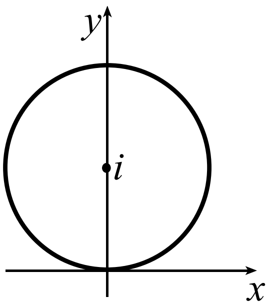


Рис. 4

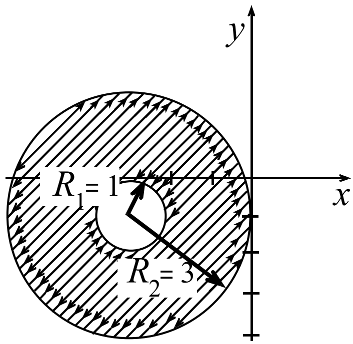


Рис. 5

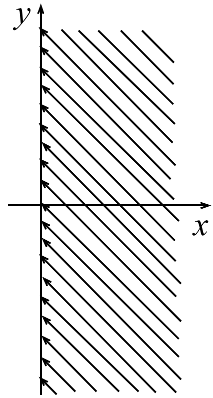


Рис. 6

б) Заметим, что $|z+3+i|=|z-(-3-i)|$. Условию $1<|z+3+i|<3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $(-3-i)$ на расстояние, большее 1, но меньшее 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке $(-3-i)$ и радиусами $R_1=1$, $R_2=3$ (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z=1$, чем к точке $z=-1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 6: искомое множество заштриховано).

г) Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$|x-1+iy|=2|x+2+iy|,$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+y^2},$$

$x^2-2x+1+y^2=4\left(x^2+4x+4+y^2\right),$

$3x^2+18x+3y^2+15=0,$

$x^2+6x+y^2+5=0,$

$\left(x+3\right)^2+y^2=4.$

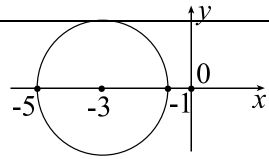


Рис. 7

Это окружность с центром в точке $z=-3$ и радиусом 2.

4. ***Аргументы комплексного числа.*** Аргументом комплексного числа $z=a+bi$ $(z\neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z; величина угла считается положительной, если отсчёт угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z=a+bi$, пишут $\varphi=\arg z$ или $\varphi=\arg(a+bi)$.

Для числа $z=0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем считать, что $z\neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z=0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z|=0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определён единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый аргумент числа z, то углы $\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(1-\mathrm{i})$ являются углы $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$, $\dfrac{15\pi}{4}$ и т. д. (см. рис. 8).

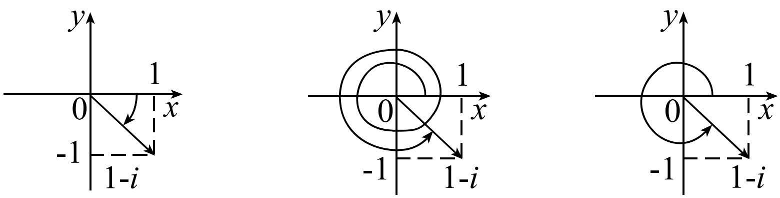


Рис. 8

Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 9) следует, что если $\varphi=\arg(a+bi)$, то справедливы равенства

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|},\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}.\end{cases} \qquad (5)$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства (5), то $\varphi = \arg(a+bi)$.

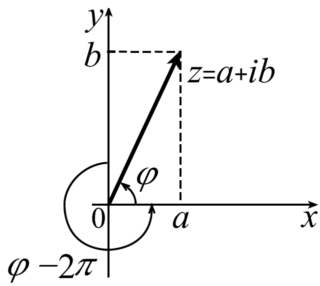
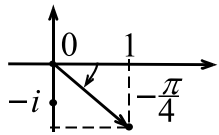


Рис. 9

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a+bi$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a+bi$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5). Заметим, что аргументы чисел z и $\overline{z}$, $z \neq 0$, связаны соотношением

$$\arg\overline{z} = -\arg z \text{ (см. рис. 2).}$$



Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1-i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = 1-i$ лежит в IV четверти. Поэтому достаточно указать такое решение одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a+bi)$, $a \neq 0$, то из (5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$. Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg}\varphi = -1$, но не является аргументом числа $(1-i)$.

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1-i)$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = -1-i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1}{-1} = 1$, которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a=0$, то есть при $z=bi$, то либо $\arg z=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ (если $b>0$), либо $\arg z=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ (если $b<0$).

§3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. ***Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.*** Запись комплексного числа z в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другие формы записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z=a+bi$, то есть $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\arg(a+bi)$. Тогда из формулы (5) следует, что $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, и, значит,

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой*.

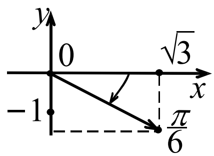
Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $a+bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

Пример 7. Записать число $z=\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль $r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2.$

Находим один из аргументов; так как $\operatorname{Re} z=\sqrt{3}>0$, $\operatorname{Im} z=-1<0$, то число $\sqrt{3}-i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-1}{\sqrt{3}}$, которое является углом в IV четверти, т. е. $\varphi=\frac{11\pi}{6}$. Таким образом,



$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Пример 8. Записать число в тригонометрической форме:

$$z=1+\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha,\ \left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right).$$

Решение.

$$r^2=|z|^2=(1+\cos 2\alpha)^2+\sin^2 2\alpha=1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha=$$

$=2+2\cos 2\alpha=4\cos^2\alpha;$ отсюда $|z|=-2\cos\alpha$

(т. к. $\alpha -$ угол третьей четверти).

$$tg(\arg z)=-\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=-tg\alpha=tg(-\alpha),$$

откуда $\arg z=-\alpha+\pi k.$

Так как $1+\cos 2\alpha>0,$ а $-\sin 2\alpha<0,$ то число z лежит в четвертой четверти, и в качестве аргумента можно выбрать $\arg z=\pi-\alpha.$

Итак, $z=-2\cos\alpha\cdot\big(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)\big).$

2. ***Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.***

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$

Тогда
$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\cdot(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+$$
$$+\cos\varphi_2\sin\varphi_1))=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (6)$$

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент суммы есть сумма аргументов сомножителей.*

Пусть $z_2\neq 0,$ тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (7)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного является разностью аргументов делимого и делителя.*

3. ***Возведение в степень и извлечение корня.*** Формула (6) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай *n* сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\varphi_n$ – аргументы чисел $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n$ соответственно, то $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\dots+\varphi_n=\arg(z_1z_2...z_n),$

$$|z_1|\,|z_2|...|z_n|=|z_1z_2...z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (8)$$

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени*.

Формула (8) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найти z^{11}, если $z = 1 - i.$

Так как $|1-i| = \sqrt{2}$, а одним из аргументов является $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ (см. пример 5 на стр. 11), то

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, применяя формулу (8), получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right] = 2^{11/2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{11/2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}^{10}(1+i) = -2^5(1+i) = -32 - 32i.$$

Пример 10. Вычислите сумму

$B = \sin\varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \ldots + \sin(\varphi + n\alpha).$

Решение. Рассмотрим также сумму

$A = \cos\varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \ldots + \cos(\varphi + n\alpha)$ и обозначим $S = A + Bi.$

Тогда интересующая нас сумма B есть мнимая часть числа S: $B = \operatorname{Im} S.$ Преобразуем S:

$$S = (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)) +$$

$$+ (\cos(\varphi + 2\alpha) + i\sin(\varphi + 2\alpha)) + \ldots + (\cos(\varphi + n\alpha) + i\sin(\varphi + n\alpha)).$$

Воспользовавшись первой формулой Муавра, получаем:

$$S = (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot$$

$$\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 + \ldots + (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n.$$

Обозначим $z_0 = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \omega_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha.$

Тогда $S = z_0 + z_0\omega_0 + z_0\omega_0^{\,2} + \ldots + z_0\omega_0^{\,n} = z_0\left(1 + \omega_0 + \omega_0^{\,2} + \ldots + \omega_0^{\,n}\right).$

Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{\,n+1} - 1}{\omega_0 - 1}.$$

Чтобы выделить мнимую часть числа, домножим дробь на число, сопряжённое знаменателю:

$$S = z_0 \cdot \frac{\left(\omega_0^{\,n+1} - 1\right)\left(\overline{\omega_0} - 1\right)}{\left(\omega_0 - 1\right)\left(\overline{\omega_0} - 1\right)} = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{\,n+1} \cdot \overline{\omega_0} - \omega_0^{\,n+1} - \overline{\omega_0} + 1}{\left(\omega_0 - 1\right)^2}.$$

Заметим, что $\omega_0 \cdot \overline{\omega_0} = \left|\omega_0\right|^2 = 1;\ \omega_0 + \overline{\omega_0} = 2\cos\alpha.$ Тогда

$$S = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{\,n} - \omega_0^{\,n+1} - \overline{\omega_0} + 1}{2 - 2\cos\alpha} = \frac{z_0\omega_0^{\,n} - z_0\omega_0^{\,n+1} - z_0\overline{\omega_0} + z_0}{4\sin^2(\alpha/2)} =$$

$$= \left[\cos(\varphi + n\alpha) + i\sin(\varphi + n\alpha) - \cos\big(\varphi + (n+1)\alpha\big) - i\sin\big(\varphi + (n+1)\alpha\big) -\right.$$

$$\left. - \cos(\varphi - \alpha) - i\sin(\varphi - \alpha) + \cos\varphi + i\sin\varphi\right] / 4\sin^2(\alpha/2).$$

Выделяем мнимую часть S:

$$\operatorname{Im} S = \frac{\sin(\varphi + n\alpha) - \sin\big(\varphi + (n+1)\alpha\big) - \sin(\varphi - \alpha) + \sin\varphi}{4\sin^2(\alpha/2)} =$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{\varphi + n\alpha - \big(\varphi + (n+1)\alpha\big)}{2}\cos\dfrac{\varphi + n\alpha + \varphi + (n+1)\alpha}{2} + 2\sin\dfrac{\varphi - (\varphi - \alpha)}{2}\cos\dfrac{\varphi + (\varphi - \alpha)}{2}}{4\sin^2(\alpha/2)} =$$

$$= \frac{-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\varphi + \dfrac{2n+1}{2}\alpha\right) + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2(\alpha/2)} = \frac{\cos\left(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi + \dfrac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2\sin\alpha/2} =$$

$$= \frac{-2\sin\left(\dfrac{\varphi - \dfrac{\alpha}{2} - \left(\varphi + \dfrac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi - \dfrac{\alpha}{2} + \left(\varphi + \dfrac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2}\right)}{2\sin\alpha/2} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi + \dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha/2}.$$

Перейдём к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n,* $n \in \mathbb{N}$, из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n = \omega.$

Таким образом, для того чтобы извлечь корень степени n, $n \in \mathbb{N}$ из числа ω, нужно решить уравнение $z^n = \omega$.

Если $\omega = 0$, то при любом n уравнение $z^n = 0$ имеет одно и только одно решение $z = 0$.

Пусть теперь $\omega \neq 0$. Представим z и ω в тригонометрической форме:

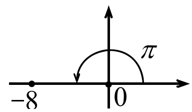
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \omega = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Тогда уравнение $z^n = \omega$ примет вид

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно,

$$r^n = r_0, \quad n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



или

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения $z^n = \omega$ даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1). \qquad (9)$$

В самом деле, придавая числу k в формуле (9) целые значения, отличные от 0, 1, ..., (n – 1), мы не получим других комплексных чисел. Например, при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right) = z_0.$$

Формула (9) называется *второй формулой Муавра.*

Таким образом, если $\omega \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа ω, все они содержатся в формуле (9).

В частности, если $n = 2$, то уравнение $z^2 = \omega$ имеет два корня:

$$z_1 = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + i\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)\right) = -z_1,$$

то есть эти корни симметричны относительно начала координат.

Также из формулы (9) нетрудно получить, что если $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, то точки, изображающие все корни уравнения $z^n = \omega$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 11. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Запишем число $\omega = -8$ в тригонометрической форме:
$\omega = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Применяя формулу (9), получаем

$z_k = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}k\right)\right)$, $k = 0,\ 1,\ 2.$ Следовательно,

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

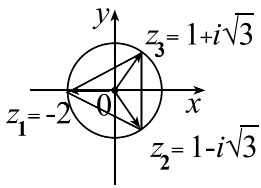


Рис. 10

Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2, находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 10).

Из сказанного выше следует, что символ $\sqrt[n]{\omega}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует чётко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$, или одно, и, если одно, то какое именно.

§4. Алгебраические уравнения

1.Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0, \tag{10}$$

с действительными коэффициентами *a, b, c.* Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ \text{где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \tag{11}$$

В случае, если $D < 0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right),$$

откуда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются на множестве комплексных чисел.

Таким образом, на множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2+bz+c=0,\quad a\neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D=b^2-4ac=0$, уравнение имеет один корень (2 совпадающих корня или один корень кратности два); при $D\neq 0$, уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула $x=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

Пример 12. Решить уравнение $z^2+z+1=0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$, то $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Пример 13. Решить уравнение $z^2+(2i-3)z+5-i=0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15-8i}$ положим

$$\sqrt{-15-8i}=x+iy.$$

Тогда $-15-8i=x^2-y^2+2ixy$, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\ 2xy=-8,\end{cases}$$

причем x и y – действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1=1,\ y_1=-4$ и $x_2=-1,\ y_2=4.$

Поэтому $z_1=\dfrac{3-2i+(1-4i)}{2}=\dfrac{4-6i}{2}=2-3i,$

$$z_2=\frac{3-2i+(-1+4i)}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n=a,$ т. е. двучленного уравнения степени n. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего *алгебраического* уравнения степени n:

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0, \tag{12}$$

где $a_0,\ ...,\ a_n$ – заданные комплексные числа.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (12), если $P_n(z_0)=0.$

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу:*

Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z-z_0$ равен $P_n(z_0)$, т. е. равен значению этого многочлена при $z=z_0$.

Действительно, $P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-z_0)+r(z),$ где остаток $r(z),$ если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z-z_0,$ т. е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z)=r$ является числом: $P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-z_0)+r.$

Положим в этом равенстве $z=z_0$. Получаем $P_n(z_0)=r,$ что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $z-z_0$ и $P_n(z)=Q_{n-1}(z)(z-z_0).$

Пример 14. Остаток от деления многочлена $F(z)$ на $(z-3-i)$ равен $3i,$ а остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(z+i-1)$ равен 5. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(z-3-i)(z+i-1).$

Решение. По теореме Безу $F(3+i)=3i,\ F(1-i)=5.$

При делении многочлена $F(z)$ на многочлен второй степени остаток будет являться многочленом первой степени, то есть, в результате деления мы получим: $F(z)=(z-3-i)(z+i-1)\cdot Q(z)+az+b,$ где $Q(z)-$ частное от деления, a и $b-$ некоторые комплексные числа. Подставим в это равенство $z=3+i$ и $z=1-i.$

$$z=3+i\Rightarrow 3i=a\cdot(3+i)+b,$$
$$z=1-i\Rightarrow\ 5=a\cdot(1-i)+b.$$

Решая эту систему, находим, что $a=\dfrac{4i-1}{2},b=\dfrac{7-5i}{2}.$

Значит, остаток $r(z)=\dfrac{4i-1}{2}\cdot z+\dfrac{7-5i}{2}.$

Пример 15. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)=z^{1502}-90z^{175}+3$ на многочлен $z^2+1.$

Решение. Выполним деление с остатком:

$$z^{1502}-90z^{175}+3=(z^2+1)Q(z)+az+b. \qquad (13)$$

Числа $z=\pm i$ являются корнями многочлена $z^2+1,$ поэтому имеет смысл подставить их в равенство $(13).$

$$z=i\Rightarrow i^{1502}-90i^{175}+3=ai+b,$$
$$z=-i\Rightarrow(-i)^{1502}-90(-i)^{175}+3=-ai+b.$$

Упрощая, получаем систему $\begin{cases}2+90i=ai+b\\2-90i=-ai+b\end{cases},$

решениями которой являются числа $a=90$ и $b=2.$

Значит, остаток равен $r(z)=90z+2.$

Замечание. Обратите внимание, что мы решим задачу, в условии которой были даны только действительные числа, с помощью комплексных чисел. При этом в ответе вышел также многочлен с действительными коэффициентами.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет на множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения

$$a_n(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}, \tag{14}$$

где z_1, z_2, ..., z_k – некоторые различные комплексные числа, а α_1, α_2, ..., α_k – натуральные числа, причем $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$ (доказательство может быть произведено индукцией по *n*).

Отсюда следует, что числа z_1, z_2, ..., z_k и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1 является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т. д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет на множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Заметим, что если уравнение не является алгебраическим, то эта теорема, вообще говоря, неверна.

Отметим также следующее утверждение. *Если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена.* Покажем это.

Если z_0 – корень многочлена P_n, то это значит, что $P_n\left(z_0\right)=0.$ Тогда $\overline{P_n\left(z_0\right)}=0,$ то есть $\overline{a_nz_0^n+a_{n-1}z_0^{n-1}+\ldots+a_1z_0+a_0}=0.$

Пользуясь равенствами (в) и (г), получаем, что

$$\overline{a_n}\left(\overline{z_0}\right)^n+\overline{a_{n-1}}\cdot\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\ldots+\overline{a_1}\,\overline{z_0}+\overline{a_0}=0.$$

Поскольку числа $a_0,a_1,\ldots,a_n$ действительные, то

$$\overline{a_n}=a_n,\ \overline{a_{n-1}}=a_{n-1},\ldots,\overline{a_0}=a_0.$$

Таким образом, $a_n\left(\overline{z_0}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{z_0}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_0} + a_0 = 0,$ что и означает, что число $\overline{z_0}$ есть корень многочлена P_n.

Можно также показать, что если для многочлена с действительными коэффициентами z_0 – корень кратности k, то и $\overline{z_0}$ корень кратности k.

Разложение (14) для многочленов с действительными коэффициентами примет вид:

$$P_n(z) = a_n\left(z - z_1\right)^{\alpha_1}\left(z - \overline{z_1}\right)^{\alpha_1}\left(z - z_2\right)^{\alpha_2}\left(z - \overline{z_2}\right)^{\alpha_2}\ldots \qquad (15)$$

$$\ldots\left(z - z_l\right)^{\alpha_l}\left(z - \overline{z_l}\right)^{\alpha_l}\cdot\left(z - z_{l+1}\right)^{\alpha_{l+1}}\left(z - z_{l+2}\right)^{\alpha_{l+2}}\ldots\left(z - z_m\right)^{\alpha_m},$$

причём $2\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l\right) + \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \ldots + \alpha_m = n.$

Здесь $z_1, z_2 \ldots, z_l$ – комплексные числа; $z_{l+1}, z_{l+2} \ldots, z_m$ – действительные числа.

Заметим, что $\left(z - z_i\right)\cdot\left(z - \overline{z_i}\right) = z^2 - \left(z_i + \overline{z_i}\right)z + z_i\overline{z_i}$ есть квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Мы получили следующее утверждение: *любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами.*

Пример 16. Решите уравнение: а) $z^3 = \overline{z}$; б) $|z| + iz = 3 - 5i.$

Решение. а) Представим число z в тригонометрической форме:

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Вспомним, что $|\overline{z}| = |z|$, а в качестве одного из аргументов числа $\overline{z}$ можно выбрать $(-\varphi)$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\rho^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) = \rho\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right). \qquad (16)$$

Возможны два случая:

(1) $\rho = 0,$ тогда $z = 0,$ и это решение уравнения.

(2) $\rho \neq 0$. Тогда выполнения равенства (16) означает, что у чисел в левой и правой части равны модули, а аргументы отличаются на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\varphi = -\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \qquad (17)$$

Несложно понять, что мы получим всевозможные решения, если подставим в (17) значения $k = 0,1,2,3$.

Итак, $z = 1\,(\text{при } k = 0)$; $z = i\,(\text{при } k = 1)$; $z = -1\,(\text{при } k = 2)$, $z = -i$ $(\text{при } k = 3)$.

Ответ: $0; \pm 1; \pm i.$

б) Пусть $z = x + iy$. Тогда $\sqrt{x^2 + y^2} + ix - y = 3 - 5i.$

Приравниваем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sqrt{25 + y^2} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ 25 + y^2 = y^2 + 6y + 9, \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Значит, $z = -5 + \dfrac{8}{3}i.$

Ответ: $-5 + \dfrac{8}{3}i.$

Выше сформулированные теоремы полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\dfrac{a_0}{a_1}$, корни уравнения второй степени $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ всегда могут быть легко получены с помощью формулы (11), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьей и четвертой степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвёртой подобных формул в общем случае просто не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z = k$ – целый корень уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

где a_0, a_1, ..., a_n – целые числа. Тогда $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 = 0.$ Отсюда получаем, что $a_0 = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \cdots + a_1)$, то есть k – делитель числа a_0 (число $a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \cdots + a_1$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 17. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0.$

Рассматривая делители свободного члена ± 1, ± 5, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z - 5$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & -4z^2 & -4z & -5 & z-5 \\
\cline{5-5}
-(z^3 & -5z^2) & & & z^2+z+1 \\
\cline{1-2}
 & z^2 & -4z & & \\
 & -(z^2 & -5z) & & \\
\cline{2-3}
 & & z & -5 & \\
 & & -(z & -5) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z-5)(z^2 + z + 1).$

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ (см. пример 12), получаем остальные корни. Итак, $z_1 = 5,\quad z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 18. Найти целые корни уравнения $2z^3 - 5z^2 - 2z + 2 = 0.$

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm 1, \pm 2.$ Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 19. Решить уравнение $z^4-2z^3-12z^2+18z+27=0.$

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z=-1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4-2z^3-12z^2+18z+27$ на $z+1$, получим многочлен $z^3-3z^2-9z+27.$ Корнем уравнения $z^3-3z^2-9z+27=0$ является число $z=3.$ Разделив многочлен $z^3-3z^2-9z+27$ на $z-3$, получим $z^2-9.$ Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде $(z+1)(z-3)(z^2-9)=0,$ т. е. имеет два однократных корня $z=-1, z=-3$ и один двукратный корень $z=3.$

Контрольные вопросы

1(5). Что называют алгебраической формой числа z? Запишите в алгебраической форме следующие числа:

а) $4(2i-3)-3(5-3i)$; б) $(3i+2)(2i-1)^2$;

в) $i^{25}-i^{35}$; г) $\dfrac{1-3i}{2+5i}.$

2(2). Найдите $z,$ если известно, что $z+2\overline{z}=-3-4i.$

3(3). Какие из следующих выражений являются тригонометрической формой числа $z=1-i\sqrt{3}$:

а) $\left(2+i\sqrt{3}\right)-\left(1+2i\sqrt{3}\right)$; б) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

в) $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$; г) $2\left(\cos 1020^{\circ}+i\sin 1020^{\circ}\right)$;

д) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; е) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{11\pi}{3}\right)$?

4(5). Запишите следующие числа в тригонометрической форме:

$z_1=3;\ z_2=-7i;\ z_3=-8;\ z_4=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i;\ z_5=3i-\sqrt{3}.$

5(8). Вычислите, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{2011}}{4^{1000}}$; б) $\dfrac{\left(1+i\right)^{37}\left(\sqrt{3}+i\right)^{44}}{\left(i\sqrt{3}-1\right)^{61}}$; в) $\sqrt[6]{-64}$; г) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.

6(8). Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

а) $\left|z+2i-1\right|=4$; б) $\arg z=\dfrac{5\pi}{6}$;

в) $\left|z+2\right|=\left|z-4i\right|$; г) $\arg\left(i\,\overline{z}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$.

7(4). Решите квадратные уравнения:

а) $3z^2+10z+11=0$; б) $3iz^2+\left(8i+4\right)z+3i+4=0$.

8(3). Сформулируйте теорему Безу. Делится ли многочлен $P\left(z\right)=2z^5-5z^3+z^2-20z+12$ на многочлен а) $z+3$; б) $z-2$? Если нет, то найдите остаток от деления.

Задачи

1(7). Представьте число z в тригонометрической форме, если

а) $z=\sin\dfrac{9\pi}{11}+i\cos\dfrac{9\pi}{11}$; б) $z=\sin\dfrac{10\pi}{7}-i\cos\dfrac{10\pi}{7}$;

в)* $z=\sin 2\alpha+i\left(1-\cos 2\alpha\right)$, где $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

2*(3). Найдите $z^n+\dfrac{1}{z^n}$, если $\underline{z+\dfrac{1}{z}=-1,\ n\in\mathbb{N}}$.

3(9). Решите уравнения:

а) $z=\left(\overline{z}\right)^3$; б) $\left(3z-i-1\right)\left(2i+5\right)-\dfrac{z+2i}{1-i}-2=17i+\left(i-5\right)\left(z+3\right)$;

в)* $z\left|z\right|-z^2+3\overline{z}=199$;

г)* $\left(iz-2\right)^4=\left(z+1\right)^4$.

4(2). Решите уравнение $z^4+2z^3-z^2-14z-15=0$, если известно, что число $z_1=\dfrac{-3-i\sqrt{11}}{2}$ является его корнем.

5(5). а) Найдите остаток от деления многочлена $P\left(z\right)$ на многочлен $\left(z^2+2z+5\right)$, если известно, что остаток от деления многочлена $P\left(z\right)$

на многочлен $(z+1+2i)$ равен $2i-3$, а остаток от деления многочлена $P(z)$ на многочлен $(z+1-2i)$ равен $2i-1$.

б)* Найдите остаток от деления многочлена $P(z)=z^{2011}-15z^{2000}+13z^{1830}-31$ на многочлен z^2+1.

6(7). Изобразите множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

а) $2|z+4-i|=|z-5-7i|$; б) $\dfrac{\overline{z}}{1+4i}=\dfrac{z}{1-4i}$;

в) $z^2+|z|^2=z|z|$.

7*(4). Вычислите сумму:

$$S=\cos\varphi+a\cos2\varphi+a^2\cos3\varphi+\ldots+a^{n-1}\cos n\varphi.$$

8(6). Представьте многочлен в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

а) $F(z)=9z^6+60z^5+73z^4-51z^3-68z^2-21z-2$;

б) $4z^4+12z^2+25$.

9(3). Составьте многочлен наименьшей степени с целыми действительными коэффициентами, имеющий корни $z_1=\dfrac{2+i}{1+i}$ и $z_2=\dfrac{(-i-1)^5}{4}$.

10*(4). Сумма кубов корней уравнения $z^3+7z^2+25z+\alpha=0$ равна 65. Найдите α и решите это уравнение.