

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральная заочная физико-техническая школа  
при Московском физико-техническом институте  
(государственном университете)**

**ФИЗИКА**

**Геометрическая оптика**

Задание №5 для 11-х классов

(2010 – 2011 учебный год)



г. Долгопрудный, 2011

*Составитель:* В.П. Слободянин, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задания №5 для 11-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2011, 30 с.

**Дата отправления заданий по физике и математике-19 марта 2011 г.**

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «\*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

**Слободянин Валерий Павлович**

Подписано 03.02.11. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,93.

Уч.-изд. л. 1,72. Тираж 1100. Заказ №5-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа  
при Московском физико-техническом институте  
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.  
ФЗФТШ при МФТИ, тел./факс (495) 408-5145 – заочное отделение  
тел./факс (498) 744-6351 – очно-заочное отделение  
тел. (498) 744-6583 – очное отделение

*e-mail:* [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru)

Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)

© ФЗФТШ при МФТИ, 2011

## Введение

Думаю, вы уже слышали, что свет – это совокупность огромного числа элементарных частиц – фотонов, обладающих двумя, казалось бы, взаимоисключающими свойствами: в некоторых экспериментах они ведут себя как обыкновенные частицы, а в некоторых – как электромагнитные волны. В межзвёздном пространстве эти волны-частицы мчатся с невероятно большой скоростью –  $3 \cdot 10^8$  м/с. Впервые числовое значение скорости света вычислил в 1675 году датский астроном Оле Рёмер, догадавшийся связать время задержки выхода одного из спутников Юпитера из его тени, со временем распространения света вдоль диаметра орбиты Земли. Скорость эта столь велика, что искривлением траектории фотонов в гравитационном поле, как правило, пренебрегают. Принято обозначать скорость света в вакууме буквой  $c$ . Скорость  $v$  фотонов в веществе и их скорость в вакууме связаны простым соотношением:

$$vn = c, \quad (1)$$

где коэффициент  $n$  называется абсолютным показателем преломления соответствующего вещества. Показатель преломления вакуума равен 1 по определению. Здесь *под скоростью света подразумевается скорость движения соответствующих гребней (или узлов) электромагнитных волн*. Такая скорость называется фазовой. Подробнее об этом мы поговорим в следующем задании.

Траектории фотонов мы будем называть световыми лучами. О световом луче имеет смысл говорить лишь тогда, когда он входит в состав светового пучка, содержащего огромное множество подобных лучей. Обычно хорошим приближением луча служит пучок света от лазерной указки.

Существует широкий круг явлений, которые можно описать с помощью простой, но весьма эффективной теории, опирающейся на небольшое число специфичных для неё постулатов и законы геометрии. Речь пойдёт о геометрической оптике. Сформулируем основные постулаты этой теории.

### § 1. Постулаты геометрической оптики

*№ 1. В прозрачной однородной среде свет распространяется прямолинейно.*

*№ 2. Распространение любого светового пучка в среде не зависит от наличия других пучков света.*

*№ 3. Освещённость любой сколь угодно малой части экрана, создаваемая несколькими световыми пучками, равна сумме освещённостей, создаваемых каждым пучком в отдельности.*

Когда узкий пучок параллельных лучей света достигает плоской границы раздела двух сред, он частично возвращается обратно (отражается). Падающий луч  $\vec{S}_1$  и нормаль (перпендикуляр)  $N$ , проведённая к границе раздела сред в точку падения (рис. 1.1), образуют плоскость  $P$ , называемую **плоскостью падения**. Острый угол  $\varphi_1$ , лежащий между падающим лучом и нормалью, называется **углом**

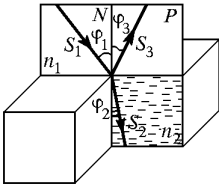


Рис. 1.1

**падения.** Отражённый луч  $\vec{S}_3$  лежит в плоскости падения. Было бы странно, если бы после отражения он отклонился от этой плоскости в ту или иную сторону. Ведь свойства пространства по обе стороны от плоскости  $P$  абсолютно одинаковы. Острый угол  $\varphi_3$ , лежащий между отражённым лучом и нормалью называется **углом отражения**.

№ 4. Угол падения равен углу отражения:

$$\varphi_1 = \varphi_3. \tag{1.1}$$

Эти четыре постулата стали обобщением огромного числа опытных фактов.

Теперь рассмотрим плоскую границу раздела двух **прозрачных** сред (пусть в них лучи света распространяются с разными скоростями). Луч, проникший из первой среды во вторую, изменит своё направление. О таком луче говорят, что он **преломился**. Преломлённый луч также лежит в плоскости падения  $P$ . Острый угол  $\varphi_2$ , лежащий между прошедшим во вторую среду лучом  $\vec{S}_2$  и нормалью  $N$ , называется **углом преломления**. При сравнении двух прозрачных веществ то из них, которое имеет больший показатель преломления, называется **оптически более плотным**. Следует заметить, что показатель преломления  $n$  как правило зависит только от частоты электромагнитной волны, распространяющейся в среде, но не зависит от величины угла падения и угла преломления.

№ 5. Математическая связь между углами падения и преломления, а также показателями преломления соответствующих сред выражается в виде обобщённого закона Снелла (в латинской транскрипции – Снеллиуса):

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2. \tag{1.2}$$

Открытие датируется 1621 годом. Запомнить закон Снелла не просто, а очень просто: справа стоит произведение величин, относящихся к одной среде, а слева – к другой. Часто при записи закона Снелла вместо двух абсолютных показателей преломления  $n_1$  и  $n_2$  используют их отношение  $n_2/n_1=n_{21}$ , называемое относительным показателем преломления второй среды относительно первой.

## § 2. Гипотезы Герона, Ферма, Веселаго

Известный физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии Ричард Фейнман однажды сказал: «По мере развития науки нам хочется получить нечто большее, чем просто формулу. Сначала мы наблюдаем явления, затем с помощью измерений получаем числа и, наконец, находим закон, связывающий эти числа. Но истинное величие науки состоит в том, что мы можем найти такой способ рассуждения, при котором закон становится очевидным».

Эти слова в полной мере можно отнести к открытию Герона Александрийского, жившего приблизительно в середине I века н.э. Герон предположил, что свет от источника до приемника распространяется по кратчайшему пути. Данная ги-

потеза делает излишним постулат № 1 геометрической оптики, ибо в однородной среде кратчайшее расстояние между двумя точками – прямая. Несложно показать, что и закон отражения вытекает из постулата Герона.

Но для света, проходящего через границу двух сред с различными показателями преломления, принцип Герона давал сбой. Только через полтора тысячелетия (в 1650 году) французский математик и физик Пьер Ферма устранил это затруднение. По идее Ферма свет распространяется между двумя точками вдоль такого пути, на преодоление которого требуется наименьшее время. Такой способ рассуждения получил впоследствии название *принцип наименьшего времени* Ферма. Опираясь на принцип Ферма, получим закон Снелла.

**Задача 2.1.** Зрочок наблюдателя находится на высоте  $H$  над поверхностью водоёма, а точечный источник света  $S$  – на глубине  $h$ . Расстояние от человека до источника (вдоль поверхности воды) равно  $L$  (рис. 2.1). Показатель преломления воды –  $n_1$ , воздуха –  $n = 1$ .

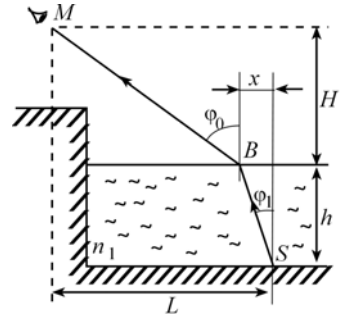


Рис. 2.1

Используя принцип Ферма, докажите, что свет от источника  $S$  до зрочка наблюдателя распространяется вдоль пути  $SBM$ , удовлетворяющего соотношению  $n_1 \sin \varphi_1 = \sin \varphi_0$ .

**Решение.** Пусть проекция отрезка  $BS$  на поверхность воды равна  $x$ , тогда

$$BS = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{H^2 + (L - x)^2}.$$

$$t = \frac{SB}{v} + \frac{MB}{c} = \left( n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{H^2 + (L - x)^2} \right) / c. \quad (2.1)$$

Согласно принципу Ферма, время на преодоление пути от  $S$  до  $M$  минимально, а это значит, что  $\frac{dt}{dx} = 0$  или  $n_1 \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}} = 0$ .

Из рис. 2.1 видим, что  $\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \sin \varphi_1$ , а  $\frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}} = \sin \varphi_0$ ,

откуда следует:  $n_1 \sin \varphi_1 = \sin \varphi_0$ , что и требовалось доказать.

Здесь уместно ввести одно полезное определение, которое нам пригодится и в следующем задании по волновой оптике.

Рассмотрим однородную среду с показателем преломления  $n$ . Возьмём в ней две точки  $A$  и  $B$ . Соединим их линией. Пусть её длина  $l$ . Будем называть *оптиче-*

**ской длиной** линии произведение её длины на показатель преломления  $n$ . Если среда неоднородна, разобьём линию на участки, вдоль которых изменение показателя преломления можно не учитывать. Пусть  $l_i$  и  $n_i$  – длина и показатель преломления  $i$ -того участка. Оптическую длину линии определим как:

$$L = \sum l_i n_i. \quad (2.2)$$

Обратите внимание на формулу (2.1), которую мы получили при выводе закона Снелла. В ней время пропорционально оптической длине линии между источником  $S$  и зрчком наблюдателя (коэффициент пропорциональности –  $1/c$ ). Значит, принцип Ферма можно переформулировать так:

**оптическая длина луча между любыми двумя точками меньше оптической длины всякой другой линии, соединяющей те же точки.**

Позднее учёные заметили, что для света время прохождения пути от источника до приёмника может иметь не только минимум, но и локальный максимум. Пришлось подправлять принцип Ферма. Он стал звучать так: *луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками вдоль пути, время прохождения (оптическая длина) которого экстремально(а).*

**Пример 1.** Поместим точечный источник света  $S$  и приёмник света  $P$  рядом, в центре полусферы, внутренняя поверхность которой зеркальная (рис. 2.2). Пусть источник и приёмник разделены ширмой. **Оптическая длина луча от источника до приёмника для всех направлений одинакова.**

1) Возьмём на поверхности сферы точку  $A$ . Пусть в этой точке плоское зеркало касается поверхности полусферы. Удалим полусферу (рис. 2.3). В соответствии с принципом Ферма, свет от  $S$  к  $P$  будет распространяться по пути  $SAP$ , причём **оптическая длина соответствующего луча будет минимальна.**

2) Если исходной полусферы в точке  $A$  касается новая полусфера меньшего радиуса (рис. 2.4), то свет по-прежнему будет распространяться по пути  $SAP$ , но, в этом случае **оптическая длина луча будет максимальной.**



Рис. 2.2



Рис. 2.3

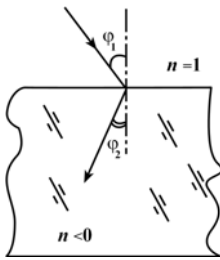


Рис. 2.4

На этом история принципа Ферма не закончилось. В середине 60-х годов прошлого века советский физик Виктор Григорьевич Веселаго предположил воз-

возможность существования сред с отрицательным показателем преломления. Он разработал теорию распространения электромагнитных волн в таких средах (см. журнал «Успехи физических наук», том 92, № 517, 1967 г). И вот в 2000 году в научных журналах появилось сообщения о том, что созданы композитные материалы (позднее их стали называть *метаматериалами*), необычные электродинамические свойства которых легко объяснить, если допустить, что в них коэффициент преломления отрицателен. Например, луч, преломившись на границе с метаматериалом, отклоняется в сторону, противоположную той, в которую он отклонялся бы в случае с  $n > 0$  (рис. 2.5).

В очередной раз пришлось подправлять принцип Ферма. Теперь в формулу (2.2)



показатель преломления  $n_i$  нужно подставлять с соответствующим знаком.

Открытие метаматериалов вызвало в физике настоящий бум. Ими заинтересовались военные (есть идеи, как с помощью сред с отрицательным показателем преломления делать самолёты-невидимки). Большие вложения средств в исследования метаматериалов делают фирмы, занимающиеся телекоммуникацией...

Рис. 2.5

### § 3. Явление полного отражения света

Рассмотрим явление прохождения света через плоскую границу раздела двух сред, когда показатель преломления  $n_1$  первой среды больше соответствующего показателя  $n_2$  второй среды. Для этого запишем закон Снелла в виде:

$$n_{12} \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2, \quad (3.1)$$

где  $n_{12}$  – относительный показатель преломления. Заметим, что  $n_{12} > 1$ .

**Внимание!** При формальных вычислениях левая часть уравнения (3.1) может оказаться больше 1. Но, справа стоит синус, значение которого всегда  $\leq 1$ . Как разрешается это противоречие?

Если  $n_{12}$  не на много превышает единицу (например, равно 1,5), а угол падения  $\varphi_1$  мал, почти все излучение проходит во вторую среду.

Увеличение угла  $\varphi_1$  сопровождается увеличением угла  $\varphi_2$ , как того требует формула (3.1), и ростом доли излучения, отраженного от границы раздела сред. При этом, естественно, падает доля излучения, проникающего во вторую среду. Эта тенденция усиливается по мере приближения угла  $\varphi_2$  к  $90^\circ$ . Наконец, при некотором угле  $\varphi_1$  угол  $\varphi_2$  достигает  $90^\circ$ , и всё падающее на границу раздела сред

излучение будет отражаться обратно. Соответствующий угол падения  $\varphi_1$  можно найти из условия

$$n_{12} \sin \varphi_1 = 1, \text{ или} \\ \varphi_1 = \arcsin \frac{1}{n_{12}} = \varphi_{\text{п.о.}} \quad (3.2)$$

В научной литературе этот угол получил специальное название — *предельный угол полного отражения*. При углах  $\varphi_1 > \varphi_{\text{п.о.}}$  во вторую среду излучение также проникать не будет. Этим и снимается противоречие между физической и математической стороной описанного явления преломления света.

### Контрольный вопрос

Обычно световоды делают в виде тонких стеклянных нитей, центральная часть которых — «сердцевина», состоит из вещества с малым коэффициентом **поглощения** и показателем преломления  $n_1$ . Это вещество, как правило, очень чувствительно к химическим и механическим воздействиям. Снаружи «сердцевина» защищена «рубашкой» — прочным стеклом с показателем преломления  $n_2$ , стойким к воздействию влаги и химических веществ. Какой из показателей преломления меньше  $n_1$  или  $n_2$ ? Поясните почему?

**Ответ.** Чтобы на пути от передатчика к приёмнику свет не вышел из «сердцевины», «рубашку» световода делают из стекла с таким показателем преломления  $n_2$ , чтобы на границе «сердцевина» — «рубашка» происходило полное отражение. Это возможно при  $n_2 < n_1$ .

## § 4. Плоские зеркала

Теперь приступим к построению изображений в плоских зеркалах. Пусть над зеркалом находится точечный источник света  $S$ . При построении его изображения необходимо использовать, по крайней мере, два произвольных луча, отражающихся от плоскости, совпадающей с плоскостью зеркала.

Методика построения изображения понятна из рис. 4.1. С практической точки зрения один из лучей (луч. 1) целесообразно пустить вдоль нормали к плоскости зеркала.

Если пучок лучей, вышедших из точки  $S$ , в результате отражения, преломления или искривления в неоднородной среде сходится в точке  $S_1$ , то точка  $S_1$  называется **действительным изображением** точки  $S$ . Если же  $S_1$  получено в результате пересечения продолжений этих лучей в направле-

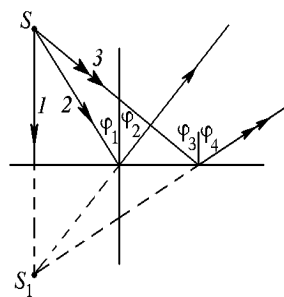


Рис. 4.1



нии, обратном направлению распространения света, то изображение называется *мнимым*. Таким образом,  $S_1$  – мнимое изображение точки  $S$ .

**Задача 4.1.** Лампочка  $L$  настольной лампы находится на расстоянии  $L_1 = 0,6$  м от поверхности стола и  $L_2 = 1,8$  м от потолка. Нить накала лампочки можно считать точечным источником света. На столе лежит осколок плоского зеркала в форме треугольника со сторонами 5 см, 6 см и 7 см.

1). На каком расстоянии  $x$  от потолка находится изображение нити накала лампочки?

2). Найти форму и размеры «зайчика» полученного на потолке от осколка зеркала (МФТИ, 1996).

**Решение.** Выполним рисунок, поясняющий смысл задачи. Обратите внимание на следующее обстоятельство: зеркало находится на столе на произвольном расстоянии от лампы (рис. 4.2). Несложно показать, что  $L_1 = L_3$ . Следовательно  $x = 2 L_1 + L_2 = 0,6 \text{ м} \cdot 2 + 1,8 \text{ м} = 3 \text{ м}$ .

Для определения формы и размера «зайчика» удобно рассмотреть лучи  $S_2$  и  $S_3$ , «исходящие» от мнимого изображения  $L_1$ . Т.к. плоскость зеркала и потолок параллельны, форма зайчика будет подобна зеркалу. Найдём коэффициент подобия. Если длина стороны зеркала  $h$ , а соответствующая ей длина стороны «зайчика»  $H$ , то можно записать пропорцию:  $h/H = L_3/x$ , из которой следует:  $H = 5 h$ . Таким образом, длины сторон «зайчика» равны 25 см, 30 см и 35 см, соответственно.

**Примечание.** Как видно из рис. 4.2, весь свет, отражённый зеркалом, должен лежать в конусе, ограниченном лучами  $S_2$  и  $S_3$ , с вершиной в точке  $L_1$ . В действительности, мы можем видеть точки падения лучей на отражающую поверхность из любого места над зеркалом. Это происходит благодаря тому, что часть излучения рассеивается во все стороны, в том числе и в направлении глаз наблюдателя. Рассеянный свет возникает главным образом на дефектах поверхности: налипших пылинках, царапинах и других неровностях размером в несколько десятков микрометров (микрон). Чем больше неровностей, тем лучше видна отражающая поверхность. Белая писчая бумага так сильно испещрена неровностями, что практически не даёт зеркального отражения. Говорят, что такая поверхность отражает *диффузно*. Но зато она хорошо видна из разных мест.

**Задача 4.2.** В архиве Снеллиуса нашли чертёж, на котором были изображены точечный источник света  $S$  и два зеркала  $M_1$  и  $M_2$ , образующие двугранный угол  $70^\circ$  (рис. 4.3).

От времени чернила выцвели, и невозможно было разглядеть, сколько изображений источника  $S$  давала такая система зеркал. Восстановить все изображения

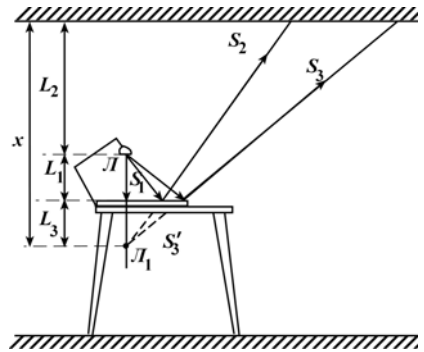


Рис. 4.2

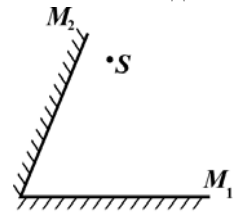


Рис. 4.3

источника  $S$ . Сколько изображений источника  $S$  можно увидеть в такой системе зеркал?

**Решение.** Источник света и его изображение расположены симметрично относительно плоскости отражающего зеркала. Если получившееся изображение окажется с отражающей стороны второго зеркала – оно даст ещё одно изображение и т.д. Заметьте, что все изображения лежат на окружности, проведённой из точки  $O$  через источник  $S$  (рис. 4.4).

1)  $S_1$  – изображение точечного источника  $S$  в зеркале  $M_1$ ;

2)  $S_{1,2}$  – изображение мнимого источника  $S_1$  в зеркале  $M_2$ . Источник  $S_{1,2}$  не даст изображений, т.к. он лежит с обратной (не отражающей) стороны плоскостей, образованных зеркалами  $M_2$  и  $M_1$ .

3)  $S_2$  – мнимое изображение точечного источника  $S$  в зеркале  $M_2$ ;

4)  $S_{2,1}$  – изображение источника  $S_2$  в зеркале  $M_1$ ;

5)  $S_{2,1,2}$  – изображение источника  $S_{2,1}$  в зеркале  $M_2$ .

Источник  $S_{2,1,2}$  не может дать изображение, т.к. он, как и источник  $S_{1,2}$ , лежит с обратной (не отражающей) стороны плоскостей зеркал  $M_1$  и  $M_2$ .

Следовательно, в зеркале можно увидеть 5 изображений источника  $S$ .

Вообще любое изображение, оказавшееся в секторе  $AOB$  (он затемнён), не может более отразиться в зеркалах  $M_1$  и  $M_2$ .

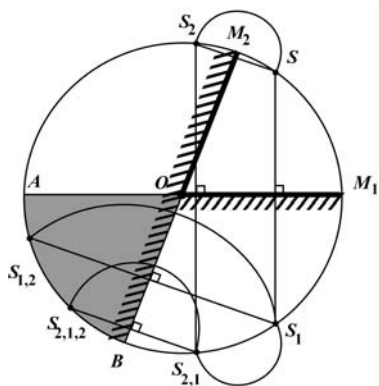


Рис. 4.4

## § 5. Приближение параксиальной оптики

Поскольку физика по своей сути – наука экспериментальная, в ней почти всегда получаются приближённые результаты. Тому много причин: неточности измерительной аппаратуры, приближённый характер используемых законов, неточность вычислительных приборов и т. д. Учитывая всё это, физики иногда уже сами исходные формулы сознательно записывают в приближённом виде. Это здорово облегчает им жизнь, упрощает вычисления и экономит время. Давайте рассмотрим одно из таких полезных упрощений. Называется оно *приближение параксиальной оптики*, а суть его заключается в том, что рассматриваются только те лучи, которые на своём пути незначительно отклоняются от исходного направления. В дальнейшем все углы, если это не оговаривается специально, будем выражать в радианах. Полезно запомнить два соотношения:

$$1^\circ = 0,01745 \text{ рад}, \quad 1 \text{ рад} = 57,3^\circ.$$

Если угол  $\varphi$  мал (менее  $10^\circ$ ), то, как правило, можно считать

$$\cos \varphi \approx 1, \quad \text{а} \quad \text{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi.$$

Закон Снелла в параксиальном приближении выглядит предельно просто:

$$n_1 \varphi_1 = n_2 \varphi_2. \tag{5.1}$$

**Задача 4.1.** Луч света падает из воздуха на невозмущённую водную поверхность под углом  $\varphi = 10^\circ$ . Найти угол преломления по точной формуле (1.2) и приближённой (5.1). На сколько процентов приближённый результат отличается от точного? (Для воды  $n = 4/3$ .)

**Решение.** Согласно (1.2)  $\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 / n$ , откуда следует, что по точной формуле (сохраняем 4 значащих цифры)  $\varphi_{2т} = 0,1306$  рад, в то время как по приближённой формуле  $\varphi_{2п} = \varphi_1 / n = 0,1309$ . Относительная погрешность приближённых вычислений  $\left| \frac{\varphi_{2т} - \varphi_{2п}}{\varphi_{2т}} \right| \cdot 100\% \approx 0,2\%$ , т. е. менее процента!

## § 6. Сферические зеркала

Трудно встретить человека, который бы не видел сферических зеркал. В самом деле, кто из нас не любовался сверкающими разноцветными шарами на новогодней елке, кто не потешался над своим изображением, искажённым сферической поверхностью.

Наверное, вы обращали внимание и на то, что чем дальше предмет от зеркала, тем правильнее его пропорции. Законами построения таких «правильных» изображений мы и займёмся.

Проведём через центр  $C$  сферы оптическую ось  $X$ . Поместим на ней точечный источник света  $S$ . Пусть  $SM$  – произвольный луч от источника до зеркала,  $\psi_1$  – угол падения,  $\psi_2$  – угол отражения. Если продолжить отражённый луч за зеркало (внутри шара), то на его пересечении с осью  $X$  (попутно ось  $X$  играет роль второго луча) будет лежать изображение  $S_1$  источника  $S$ . Найдём аналитическую связь между углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 6.1).

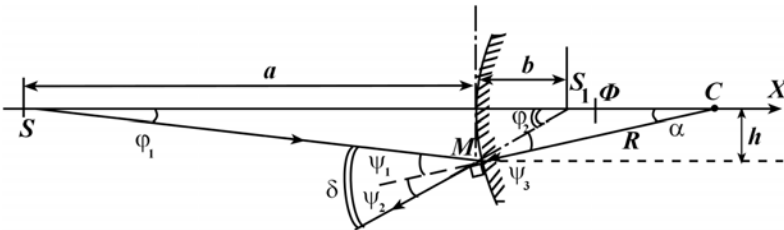


Рис. 6.1

Для треугольника  $SM_1S_1$  угол  $\delta$  – внешний, а по теореме о внешнем угле треугольника

$$\delta = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (6.1)$$

Для треугольника  $MS_1C$  угол  $\varphi_2$  – внешний. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\varphi_2 = \alpha + \psi_3. \quad (6.2)$$

Так как  $\psi_1 = \psi_2$  (по закону отражения), то  $\delta = 2\psi_2$ . Углы  $\psi_2$  и  $\psi_3$  равны как вертикальные, следовательно

$$\delta = 2\psi_3. \quad (6.3)$$

Подстановка (6.3) в (6.2) даёт:  $\varphi_2 = \alpha + \frac{\delta}{2}$ , откуда  $\delta = 2(\varphi_2 - \alpha)$ .

Подставим последнее выражение в (6.1):  $2(\varphi_2 - \alpha) = \varphi_1 + \varphi_2$ , или

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\alpha. \quad (6.4)$$

Смотрите! Если зафиксировать точку  $M$  на зеркале, то угол  $\alpha$  тоже окажется фиксированным. Если теперь смещать источник  $S$  вдоль оси  $X$ , то углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  будут изменяться, но их разность окажется неизменной. В пределе, при удалении  $S$  влево на бесконечно большое расстояние угол  $\varphi_1$  обратится в ноль, а  $\varphi_2$  станет равным  $2\alpha$ . Заметим, что в приближении параксиальной оптики расстояние  $h$  от точки  $M$  до оси  $X$  много меньше радиуса  $R$  сферического зеркала. Следовательно, можно записать приближённые равенства:

$$\varphi_1 \approx \frac{h}{a}, \quad \varphi_2 \approx \frac{h}{b}, \quad \alpha \approx \frac{h}{R}.$$

Их подстановка в (6.4) даст:  $\frac{h}{b} - \frac{h}{a} = 2\frac{h}{R}$ ,

или, после сокращения на  $h$ :  $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{2}{R}$ .

В силу произвольности выбора точки  $M$  легко сделать вывод, что и широкий пучок параллельных лучей, распространяющихся вдоль оптической оси, соберётся на расстоянии  $R/2$  от центра сферы в точке  $F$ , называемой *фокусом* сферического зеркала. Обозначим это расстояние символом  $F$ :

$$F=R/2, \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F}. \quad (6.6)$$

Величину, обратную фокусному расстоянию, называют оптической силой сферического зеркала. Единица оптической силы называется *диоптрией* (дптр). Оптическая сила зеркала с  $F = 1$  м равна 1 дптр.

Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и отстоящая от поверхности сферического зеркала (и центра сферы) на расстояние  $R/2$ , называется *фокальной плоскостью*. Используя приближение парааксиальной оптики, мы получили удобные формулы для построения изображений точечных источников в выпуклых сферических зеркалах. Несложно обобщить полученные результаты на случай вогнутых сферических зеркал (см. рис. 6.2). В этом случае

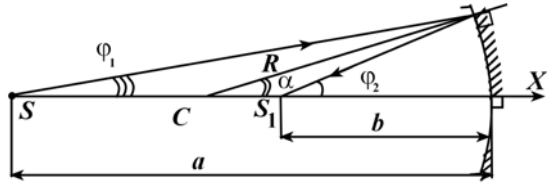


Рис. 6.2

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha, \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{6.8}$$

Замечательно то, что подобного рода формулы получаются и для линз.

### § 7. Преломление света в тонком клине

Прежде чем приступить к изучению свойств тонкой линзы, давайте рассмотрим отклонение узкого пучка света от первоначального направления при прохождении через тонкий клин (рис. 7.1). Пусть  $n$  – показатель преломления материала клина,  $\alpha$  – *преломляющий* угол при вершине клина  $\alpha \ll 1$ ,  $\varphi_1$  – угол падения света на первую грань клина. Найдём угол  $\delta$  отклонения луча от исходного направления.

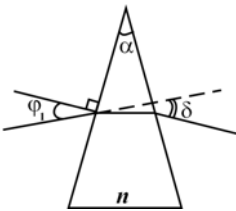


Рис. 7.1

Задачу будем решать в парааксиальном приближении. Для наглядности угол  $\alpha$  изобразим сильно увеличенным (рис. 7.2). Запишем приближённый закон Снелла для обеих преломляющих поверхностей клина:

$$\varphi_1 = n\psi_1, \quad \varphi_2 = n\psi_2. \tag{7.1}$$

Для каждой из них найдём угол отклонения:

$$\delta_1 = \varphi_1 - \psi_1 = (n-1)\psi_1, \quad \delta_2 = \varphi_2 - \psi_2 = (n-1)\psi_2. \tag{7.2}$$

По теореме о внешнем угле треугольника искомого угла

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (n-1)(\psi_1 + \psi_2). \tag{7.3}$$

По той же теореме  $\psi_1 + \psi_2 = \alpha_1$ . Теперь заметим, что углы  $\alpha$  и  $\alpha_1$  равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. В итоге мы получим:

$$\delta = (n-1)\alpha_1 = (n-1)\alpha. \tag{7.4}$$

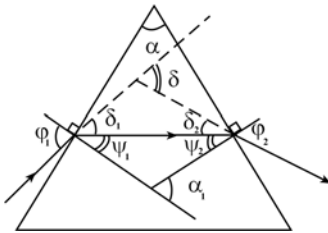


Рис. 7.2

чим:

Любопытный результат: в параксиальном приближении угол отклонения не зависит от угла падения и остаётся постоянной величиной при любом (малом) угле падения.

### § 8. Тонкие линзы

Применим разработанную нами методику для исследования свойств оптических линз. Из произвольной точки  $C_1$  проведём сферическую поверхность радиуса  $r_1$ , разделяющую пространство на две половины. Пусть в левой половине пространства показатель преломления равен  $n_1$ , а в правой –  $n_2$ , причём, для определённости, будем считать, что  $n_2 > n_1$ . Проведём через точку  $C_1$  ось  $X$  (рис. 8.1). Это – главная оптическая ось системы. Поместим на ней точечный источник света  $A_1$  и рассмотрим один из лучей, распространяющихся от этого источника вправо до точки  $B_1$ , лежащей на границе раздела двух сред. Для треугольника  $A_1B_1C_1$  угол падения  $i_1$  – внешний, поэтому в соответствии с теоремой о внешнем угле треугольника  $i_1 = \varphi_1 + \alpha$ .

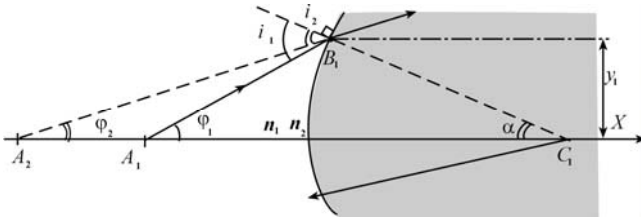


Рис. 8.1

В точке  $B_1$  луч света преломится и, изменив направление своего движения, пойдёт так, как будто он был испущен в точке  $A_2$  и все время распространялся прямолинейно. Для треугольника  $A_2B_1C_1$  внешним будет угол преломления  $i_2$ , и поэтому  $i_2 = \varphi_2 + \alpha$ . Подставим найденные выражения для углов  $i_1$  и  $i_2$  в приближённый закон Снелла (5.1):  $n_1 i_1 = n_2 i_2$ . Получится

$$(\varphi_1 + \alpha)n_1 = (\varphi_2 + \alpha)n_2. \tag{8.1}$$

В рамках приближения параксиальной оптики  $\alpha = y_1 / r_1$ , поэтому из (8.1) следует:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_2 n_2 = p_1 y_1. \tag{8.2}$$

Здесь мы ввели величину  $p_1 = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$ , называемую *оптической силой преломляющей поверхности*.

Данное обозначение весьма полезно, т.к. оптическая сила зависит только от свойств этой поверхности и одинакова для всех лучей!

Теперь предположим, что на пути луча оказалась другая сферическая поверхность с радиусом  $r_2$ , разделяющим пространство на области с показателями пре-

ломления  $n_2$  и  $n_3$ . Среду с показателем преломления  $n_2$ , ограниченную поверхностями  $r_1$  и  $r_2$ , назовём *линзой*.

Введём одно определение: радиус кривизны оптической поверхности считается положительным, если центр кривизны расположен справа от неё, в противном случае, *радиус будет отрицательным*.

Пусть  $n_2 > n_3$  и  $r_2$  – отрицателен. Рассуждая аналогично ранее рассмотренному случаю, мы получим:

$$\varphi_2 n_2 - \varphi_3 n_3 = p_2 y_2, \quad (8.3)$$

где 
$$p_2 = \frac{n_3 - n_2}{r_2}. \quad (8.4)$$

Поскольку в уравнения (8.2) и (8.3) входит общее слагаемое:  $\varphi_2 n_2$ , мы можем объединить эти два уравнения в одно, исключив  $\varphi_2 n_2$ :

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 y_1 + p_2 y_2). \quad (8.5)$$

Если расстояние между боковыми поверхностями линзы столь мало, что изменение высоты луча внутри линзы при любом  $\varphi_1$  можно не учитывать (не забывая, что угол  $\varphi_1$  мал), то такая линза называется *тонкой*.

Для тонкой линзы мы можем опустить индексы у высоты луча «у». Тогда (8.5) примет вид:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 + p_2) y. \quad (8.6)$$

Из (7.6) следует первый вывод: *оптическая сила двух близко расположенных преломляющих поверхностей равна их сумме*:  $p_{\text{общ}} = p_1 + p_2$ .

Применительно к тонкой линзе этот вывод можно сформулировать так: оптическая сила линзы равна сумме оптических сил её преломляющих поверхностей. Если справа и слева от линзы находится воздух (это наиболее типичная ситуация), то  $n_1 = n_3 = 1$ , и

$$p_{\text{общ}} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8.7)$$

формула (8.5) стала ещё проще:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F. \quad (8.8)$$

В правой части (8.8) стоит выражение  $\varphi_F = y \cdot p_{\text{общ}}$ , где

$$p_{\text{общ}} = \frac{1}{F} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8.9)$$

Здесь  $F$  имеет размерность длины. Её физический смысл мы скоро выясним.

Будем считать острый угол между лучом света и положительным направлением оси  $X$  положительным, если он отсчитывается от оси  $X$  против часовой стрелки. В противном случае угол будет отрицательным.

В принятых нами обозначениях угол  $\varphi_3$  отрицателен, т.к. он отсчитывается от главной оптической оси по часовой стрелке. Точно также отрицателен и радиус  $r_2$  (см. определение на стр. 14). Если брать только абсолютные величины углов, то вместо (8.8) следует записать

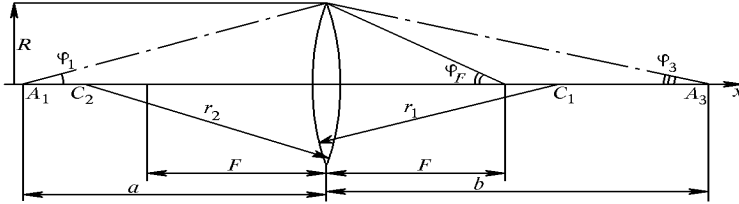


Рис. 8.2

$$|\varphi_1| + |\varphi_3| = \varphi_F \tag{8.10}$$

Для тонкой линзы формула (8.10) позволяет дать простую и красивую физическую интерпретацию. Начнём отодвигать источник света всё дальше и дальше от линзы. Угол  $\varphi_1$  при этом будет уменьшаться, и в пределе обратится в 0, а угол  $\varphi_3$  станет равным  $\varphi_F$ .

Вот и проясняется физический смысл величины  $F$ . Все лучи, проходящие параллельно главной оптической оси системы (независимо от расстояния  $y$  до неё), преломившись в линзе, соберутся в одной точке, называемой *фокусом*, и отдалённой от линзы на расстоянии  $F$ . Величина  $F$  называется *фокусным расстоянием* линзы. Стал ясен и физический (геометрический) смысл отношения  $y/F = \varphi_F : \varphi_3$  – это угол, под которым из фокуса линзы видна точка, в которой произошло преломление падающего луча. Если принять  $y = R$  (где  $R$  – радиус оправки линзы), то смысл соотношения (8.10) станет ещё проще: сумма углов, под которыми виден край собирающей линзы из точек расположения источника света и его изображения, есть величина постоянная, равная углу, под которым из фокуса виден этот же край (рис. 8.2).

В задачах углы задают редко. Обычно известно расстояние от линзы до предмета или до его изображения и фокусное расстояние. Учитывая, что  $|\varphi_1| \approx \frac{R}{a}$ ,  $\varphi_F \approx \frac{R}{F}$ , а  $|\varphi_3| \approx \frac{R}{b}$ , мы из (8.10) после сокращения на  $R$  получим знаменитое выражение для формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{8.11}$$

Стоит отметить, что, хотя для практических вычислений формула (8.11) значительно удобнее формулы (8.10), в последней записи совершенно исчезает ясное физическое содержание полученного нами закона, которому подчиняются все оптические лучи, проходящие через тонкие собирающие линзы.



Наконец, важно помнить, что формулы линзы получены нами в приближении параксиальной оптики и поэтому не следует их абсолютизировать.

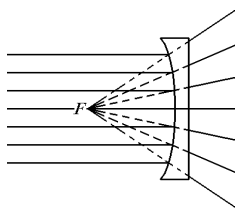
Теперь попробуем извлечь пользу из полученных нами формул. Совершенно ясно, что если источник приблизить к линзе настолько, что он окажется к ней ближе, чем её передний фокус, то для сохранения смысла формулы (8.10) будет необходимо перед абсолютным значением величины угла  $\varphi_3$  взять минус. Это означает, что изображение источника стало мнимым и находится с той же стороны от линзы, что и источник. Формулы же (8.10) и (8.11) примут вид

$$|\varphi_1| - |\varphi_3| = \varphi_F \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (8.13)$$

Для наших рассуждений мы выбрали собирающую линзу. Но полученные формулы носят общий характер.

В самом деле, вернёмся к выражению (8.9). В нём величина  $(n_2 - 1)$  положительная, а вот радиусы  $r_1$  и  $r_2$  могут иметь разные знаки. Всё зависит от того, с какой стороны находится центр кривизны соответствующих поверхностей. Мы уже видели, что для двояковыпуклой линзы  $r_1 > 0, r_2 < 0$ . А если линза двояковогнутая, т.е. ( $r_1 < 0, r_2 > 0$ ), то фокусное расстояние окажется отрицательным, а значит *отрицательной* (рассеивающей) будет и линза. Иногда знак кривизны преломляющих поверхностей линзы задают иначе. Говорят, что если данная поверхность линзы выпуклая, её радиус кривизны положителен, а если вогнутая – отрицателен. При внимательном анализе оказывается, что оба подхода дают одинаковые результаты.



**Рис. 8.3**

Если фокусное расстояние линзы отрицательно, это приводит к перестановке переднего и заднего фокусов линзы. Фактически мы будем наблюдать следующее: параллельный пучок, падающий слева на линзу, после преломления всегда будет расходиться, причём исследователю, стоящему справа от линзы, будет казаться, что источник находится в переднем фокусе линзы (рис. 8.3).

При желании вы легко можете обобщить наши результаты на случай, когда линза находится не в воздухе, а в среде с показателем преломления  $n$ , отличным от 1, или когда слева и справа от линзы находятся среды с раз-

личными показателями преломления, или когда центры кривизны обеих поверхностей линзы лежат с одной стороны или...

## § 9. Построение изображений, даваемых тонкой линзой

Предположим, что у нас есть тонкая собирающая линза  $L$ . Поместим слева от нее на расстоянии, большем фокусного, вертикальную стрелку  $AB$ .

Пустим луч 1 из точки  $B$  на линзу параллельно главной оптической оси. Преломившись в линзе, луч пойдёт через задний фокус вправо вниз. Луч 2 пустим из точки  $B$  через передний фокус. Преломившись в линзе, он пойдёт вправо параллельно главной оптической оси. Существует точка  $B_1$ , в которой оба луча пересекутся.  $B_1$  есть изображение точки  $B$ . Любой другой луч, например 3, вышедший из точки  $B$  и прошедший сквозь линзу, должен пройти и через точку  $B_1$ . Аналогичным образом построим изображение точки  $A$  и других точек, образующих стрелку  $AB$ . Итак, имея линзу и

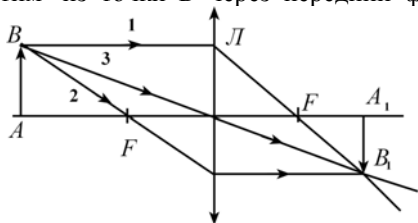


Рис. 9.1

предмет  $AB$ , мы построили его изображение.

Отметим два достаточно общих свойства линзы: прямую линию она отображает в прямую; если в пространстве предметов прямая перпендикулярна главной оптической оси, то и её изображение окажется перпендикулярным этой оси. Вообще говоря, углы в пространстве предметов и пространстве изображений различны. Это прекрасно иллюстрирует рис. 9.2.

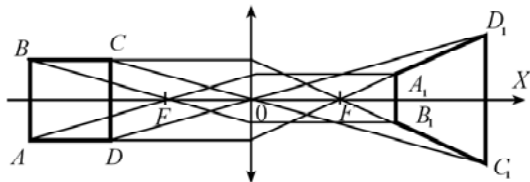


Рис. 9.2

Квадрат  $ABCD$  линза «превратила» в трапецию  $A_1B_1C_1D_1$ . Если справа и слева от линзы находится одна и та же среда, то для построения изображения точки часто оказывается удобным использовать ещё один «замечательный» луч — тот, который идёт через центр линзы. На рис. 9.1 он отмечен как луч 3. Этот луч, проходя через линзу, не меняет своего направления и так же, как и первые два луча, проходит через точку  $B_1$ . Иногда такие лучи, проходящие через центр линзы, за их «несгибаемость» называют *побочной оптической осью*. Но с лучами, проходящими через центр линзы, нужно быть внимательными. Если слева и справа от линзы находятся среды с различными показателями преломления (например, вода и воздух), то таких испытаний побочная ось не выдерживает и... сгибается! Для изображений действительных предметов, даваемых тонкими собирающими линзами, полезно запомнить следующую таблицу.

Расстояние от линзы до предмета	Изображение прямое или перевёрнутое	Изображение действительное или мнимое	Изображение увеличенное или уменьшенное
$a < F$	прямое	мнимое	увеличенное
$F < a < 2F$	перевёрнутое	Действительное	увеличенное
$a > 2F$	перевёрнутое	Действительное	уменьшенное

Эта таблица – для положительной линзы. Если вы попытаетесь заполнить такую таблицу для отрицательной линзы, то убедитесь, что она всегда даёт прямое, мнимое, уменьшенное изображение действительного предмета. Отсюда, в частности, следует важный вывод: прямое изображение действительного предмета всегда мнимое.

Задача 9.1. Показать с помощью построения (рис. 9.3) направление, вдоль которого пришёл к линзе луч  $AB$ .

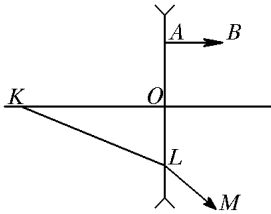


Рис. 9.3

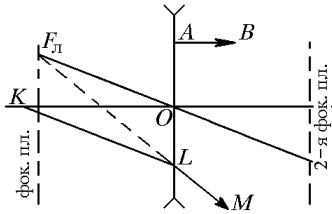


Рис. 9.4

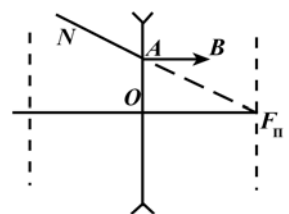


Рис. 9.5

**Решение.** Прежде всего, при решении задач подобного рода ищут фокальные плоскости. Для этого следует провести через оптический центр  $O$  линзы побочную ось, параллельную одной из половинок луча, преломившегося в линзе. Проведем побочную ось параллельно лучу  $KL$ . Проверьте самостоятельно, что эта методика работает и для луча  $LM$ . Продолжим луч  $LM$  влево до пересечения в точке  $F_{л}$  с побочной оптической осью. Эта точка лежит в фокальной плоскости. Другая фокальная плоскость находится справа от линзы на том же расстоянии. Теперь проводим через оптический центр линзы вторую побочную ось параллельно лучу  $AB$ . В нашем случае она совпадает с оптической осью системы. Интересующий нас луч должен пройти через точку  $A$  и точку  $F_{п}$  пересечения построенной оси с фокальной плоскостью (рис. 9.5). Таким образом, луч  $AB$  до преломления в линзе распространялся вдоль прямой  $NA$ .

## § 10. Глаз и очки

Строение глаза (как оптического прибора) показано на рис. 10.1. Прочная шаровидная оболочка глаза, называемая склерой, в передней части более выпукла и совершенно прозрачна. Эта часть называется роговицей (1). За ней находится

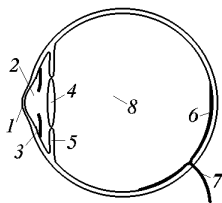


Рис. 10.1

прозрачная водянистая масса (2), за ней – радужная оболочка (3), в центре которой есть круглое отверстие – зрачок. Диаметр зрачка может изменяться, регулируя тем самым проникающий в него световой пучок. Описанное устройство напоминает камеру – обскуру. Сразу за радужной оболочкой находится хрусталик (4), охваченный кольцевой мышцей (5). Задняя внутренняя стенка склеры выстлана сетчаткой (6), состоящей из светочувствительных элементов. Именно от них раздражение по зрительному нерву (7) передаётся в мозг. Пространство между хрусталиком и сетчаткой заполнено стекловидным телом (8). Хрусталик (4) — это своеобразная двояковыпуклая линза (её показатель преломления возрастает от периферии к центру), с помощью которой на сетчатке создаётся резкое изображение рассматриваемых предметов. Кольцевая мышца, охватывая хрусталик и изменяя его кривизну, позволяет всё время создавать на сетчатке резкое изображение рассматриваемых предметов, независимо от расстояния до них (этот процесс называется аккомодацией). При нормальном зрении дальняя точка (т. е. наиболее удалённая точка, чётко фокусируемая на сетчатке) лежит в бесконечности и фиксируется без усилий. Ближняя точка располагается на расстоянии от 10 до 22 см от глаза (в зависимости от возраста человека). У разных людей в силу тех или иных причин могут наблюдаться отклонения от указанных границ аккомодации. У близоруких людей дальняя точка лежит на конечном расстоянии (иногда весьма небольшом), а у дальнозорких увеличено расстояние до ближней точки. Чтобы скомпенсировать указанные дефекты зрения обычно применяют очки. Очки позволяют создать изображение предмета на таком расстоянии, на котором глаз может увидеть его резким. Очевидно, изображение, создаваемое линзами очков, должно быть прямым (какой прок от перевёрнутого изображения?), а прямое изображение всегда мнимое (см. абзац, следующий за таблицей в конце § 8). Для человека с нормальным зрением расстояние в 25 см является оптимальным для рассматривания деталей предмета без чрезмерного утомления глаз. Поэтому это расстояние называется *расстоянием наилучшего зрения*.

Изложенной выше информации вполне достаточно для того, чтобы суметь правильно подобрать очки или контактные линзы.

**Задача 10.1.** Дальнозоркий человек резко видит предметы, расположенные не ближе 1 метра от него. Какие контактные линзы ему следует носить, чтобы, читая книгу, он держал её на расстоянии  $L = 25$  см?

**Примечание:** оптическая сила  $P = F^{-1}$ , где  $F$  выражено в метрах, измеряется в диоптриях (дптр).

**Решение.** Как уже говорилось ранее, контактная линза должна создавать прямое мнимое изображение книги на расстоянии  $b = 1$  м. Саму книгу человек дер-

жит на расстоянии  $a = 0,25$  м. Применим формулу линзы:  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = P$ . Численная подстановка дает  $P = +3$  дптр. Следовательно, человек, о котором говорится в задаче, нуждается в положительных контактных линзах с оптической силой  $P = +3$  дптр.

### § 11. Поперечное и продольное увеличение

Рассмотрим линейный предмет  $AB$ , находящийся перед оптической системой (например, линзой) и его изображение  $A_1B_1$  (рис. 11.1).

**Определение.** Увеличением оптической системы называется отношение величины изображения предмета к величине самого предмета.

Здесь полезно выделить два основных случая.

1) Предмет лежит в плоскости, расположенной перпендикулярно главной оптической оси системы, Возникающее при этом увеличение называется поперечным. Будем обозначать его  $\Gamma$ .

Для тонких линз все необходимые формулы вы можете получить самостоятельно, поэтому ниже предлагается только окончательный результат:

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{b - F}{F} = \frac{F}{a - F}. \tag{11.1}$$

Все размеры следует брать с соответствующими знаками.

Иногда наряду с поперечным увеличением  $\Gamma$  используют угловое увеличение

$$\Gamma_\varphi. \text{ По определению} \quad \Gamma_\varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \tag{11.2}$$

(Углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  изображены на рис. 11.2) Несложно доказать, что  $\Gamma_\varphi \Gamma = 1$ .

2) Предмет расположен вдоль главной оптической оси и лежит на ней. Возникающее при этом увеличение называется продольным. Получим формулу для продольного увеличения, создаваемого тонкой линзой:

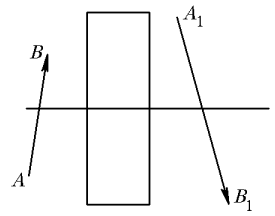


Рис. 11.1

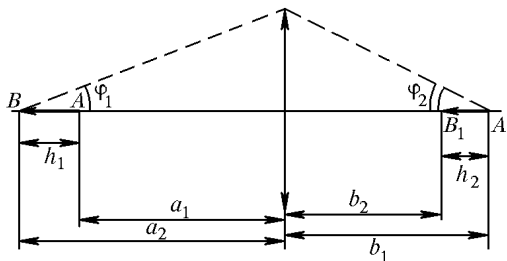


Рис. 11.2

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}. \tag{11.3}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}. \tag{11.4}$$

Объединим (11.3) и (11.4)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2} \Rightarrow \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{b_1}{a_1} \frac{b_2}{a_2}.$$

Поскольку  $|b_1 - b_2| = h_2$ ,  $|a_2 - a_1| = h_1$  и  $\frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1$ ,  $\frac{b_2}{a_2} = \Gamma_2$ ,

окончательно запишем, что продольное увеличение

$$\Gamma_{12} = \frac{h_2}{h_1} = \Gamma_1 \Gamma_2 \tag{11.5}$$

Если  $h_1 \ll a_1, a_2$  и  $h_2 \ll b_1, b_2$ , то

$$\Gamma_{12} \approx \Gamma^2. \tag{11.6}$$

**Задача 11.1.** Букашка ползёт со скоростью  $v_0 = 0,2$  см/с в сторону тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 6$  см вдоль прямой, параллельной главной оптической оси линзы и отстоящей от оси на расстояние  $a = 3$  см (рис. 11.3). Найти скорость перемещения изображения букашки, когда она находится на расстоянии  $F/2$  от плоскости линзы.

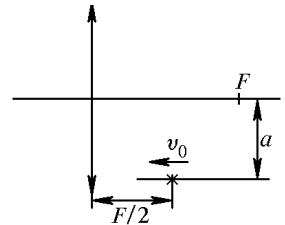


Рис. 11.3

**Решение.** Допустим, что за малый промежуток времени  $\Delta t$  букашка про-

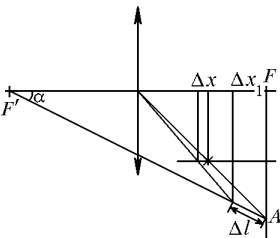


Рис. 11.4

ползла расстояние  $\Delta x = v_0 \Delta t$ . В соответствии с формулой (11.5) изображение букашки сместится вдоль оси линзы на расстояние  $\Delta x_1 = \Delta x \Gamma^2$ , где

$$\Gamma = \frac{F}{a - F} = \frac{6}{3 - 6} = -2. \text{ Знак «минус» означает,}$$

что изображение мнимое, т.е. находится с той же стороны от линзы, что и букашка (рис. 11.4). Из построения видно, что перемещение изображения букашки

$$\Delta l = \Delta x_1 / \cos \alpha.$$

В прямоугольном треугольнике  $F'FA$  катеты  $AF$  и  $FF'$  относятся, как 1:2. Отсюда находим  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ . Следовательно скорость перемещения изображения букашки  $v_1 = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1}{\cos \alpha \cdot \Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\tilde{A}^2}{\cos \alpha} = v_0 \frac{\tilde{A}^2}{\cos \alpha}$ .

Численный ответ:  $v_1 \approx 0,9 \text{ см/с}$ .

**Примечание.** В данной задаче приближения парааксиальной оптики не выполняются, поэтому использованные нами формулы также неточны. Полученный ответ нужно рассматривать только, как весьма приближённый, и вычисление  $v_1$  с большей точностью не правомерно (в решениях этой задачи автор встречал ответ  $v_1 = 0,894 \text{ см/с}$ ).

Иногда требуется получить увеличенное мнимое изображение мелких предметов. В этом случае применяют лупу или микроскоп.

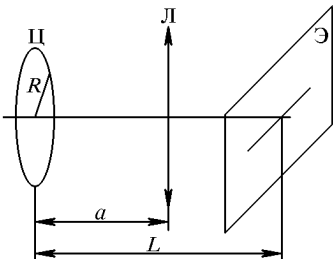
Лупа — это положительная линза с небольшим фокусным расстоянием ( $10\text{мм} < F < 100\text{мм}$ ), располагаемая между рассматриваемым предметом и глазом. Обычно лупу располагают непосредственно возле глаза (как очки), а предмет — вблизи фокуса так, чтобы его мнимое изображение находилось на расстоянии наилучшего зрения  $a_n$ . При этом оказывается, что видимое увеличение предмета

$$N \approx \frac{a_i}{F}. \tag{11.7}$$

Микроскоп, как и лупа, увеличивает видимые угловые размеры исследуемых объектов. Но поскольку фокусное расстояние системы линз, входящих в микроскоп, ещё меньше, чем у лупы, то его увеличение (см. формулу (11.7)) может достигать нескольких сотен!

## § 12. Примеры решения задач

**Задача 12.1.** С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$  на экране  $\mathcal{E}$ , расположенном на расстоянии  $L = 4,9F$  от циферблата наручных часов  $\mathcal{C}$ ,



**Рис. 12.1**

получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой  $R = 1,5 \text{ см}$  (рис. 12.1). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата часов и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения кончика изображения стрелки на экране? (МФТИ, 1997 г.)

**Решение.** Запишем уравнение тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} = \frac{1}{F} \Rightarrow a^2 - La + LF = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{L}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 3,5F; \quad a_2 = \frac{L}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 1,4F.$$

Так как по условию изображение уменьшенное, то  $a = 3,5F$ , следовательно,  $b = L - a = 1,4F$ , увеличение  $\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4$ .

Длина изображения стрелки  $R' = R\tilde{A} = 1,5\text{мм} \cdot 0,4 = 0,6\text{ см}$ , скорость  $v = R'\omega = R' \frac{2\pi}{T} = 0,6 \frac{2\pi}{60} \approx 0,063\text{ см/с}$ .

**Задача 12.2.** На главной оптической оси тонкой положительной линзы диаметром  $D$  находится точечный источник света. Из линзы выходит расходящийся пучок лучей с максимальным углом отклонения лучей от главной оптической оси  $\alpha$ . Определить максимальный угол отклонения  $\beta$ , если вместо положительной линзы на то же место поставить отрицательную линзу того же диаметра и с тем же фокусным расстоянием. Расстояние между источником и линзой равно  $d$  (МФТИ, 1982 г.).

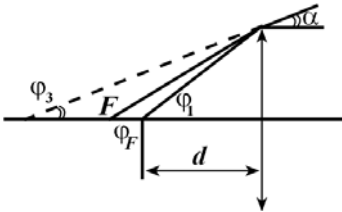


Рис. 12.2

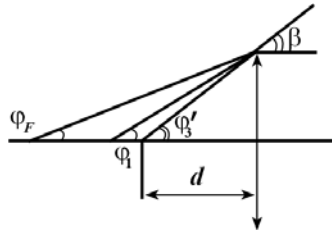


Рис. 12.3

**Решение.** Максимальный угол отклонения луча от оптической оси будет наблюдаться при прохождении луча через край линзы (на расстоянии  $D/2$  от её оптического центра). В приближении парааксиальной оптики для положительной линзы (формула (8.12)) запишем:  $\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F$ , где (рис. 12.2):

$$\varphi_1 \approx \frac{D}{2d}, \tag{12.1}$$



а  $\varphi_3 = \alpha$  по построению, следовательно,

$$\varphi_1 - \alpha = \varphi_F \tag{12.2}$$

Для отрицательной линзы  $\varphi'_3 - \varphi_1 = \varphi_F$  (см. рис. 12.3). Но по построению

$$\varphi'_3 = \beta \Rightarrow \beta - \varphi_1 = \varphi_F \tag{12.3}$$

Решая совместно уравнения (12.2) и (12.3), получаем

$$\beta = 2\varphi_1 - \alpha,$$

или, с учётом (12.1)

$$\beta = \frac{D}{d} - \alpha.$$

Некоторые учащиеся решили задачу «точно». В этом случае они получили ответ:

$$\beta = \arctg\left[\frac{D}{d} - \tg\alpha\right]$$

Но, строго говоря, это превышение точности того приближения, в котором были получены формулы тонкой линзы.

**Задача 12.3.** Тонкая линза создаёт на экране изображение предмета в 20 раз большее, чем предмет. Экран передвинули вдоль оси линзы на 4 м. Чтобы получить резкое изображение, предмет пришлось переместить на 40 см. Каким, при этом, стало увеличение? В какую сторону – к линзе или от линзы – переместили предмет? (МФТИ, 1982 г.)

**Решение.** Продольное увеличение  $\Gamma_{12} = \left| \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right|$ , где

$$|b_1 - b_2| = 4 \text{ м}, |a_1 - a_2| = 0,4 \text{ м} \Rightarrow \Gamma_{12} = 10.$$

По условию  $\Gamma_1 = 20$ . Согласно формуле (11.5),

$$\Gamma_{12} = \Gamma_1 \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_1} \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{10}{20} = 0,5.$$

Таким стало поперечное увеличение.

По определению  $\tilde{A} = \frac{b}{a}$ . Так как  $\Gamma$  уменьшилось,

расстояние от предмета до линзы должно быть увеличено. Следовательно, предмет переместили от линзы.

**Задача 12.4.** В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием  $F = 40$  см. По потолку ползёт муха со скоростью  $v = 2$  см/с. Расстояние от потолка до зеркала  $h = 220$  см (рис. 12.4).

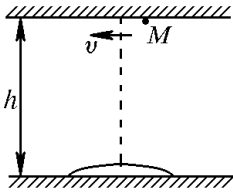


Рис. 12.4

1). На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе?

2) Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы? (МФТИ, 1998 г.)

**Решение.** Луч света после прохождения линзы отражается от зеркала и проходит сквозь линзу еще раз. Таким образом, оптическая сила системы «линза + + зеркало» в два раза больше оптической силы одной линзы:  $P_{\text{не нб}} = 2 / F$ .

Расстояние от центра зеркала (и линзы) до изображения мухи найдём с помощью формулы линзы:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{h} = \frac{2}{F} \Rightarrow b = \frac{hF}{2h - F}; b = 22 \text{ см.}$$

Скорость изображения мухи найдём из соотношения подобия (рис. 12.5):

$$\frac{v \Delta t}{h} = \frac{v' \Delta t}{b} \Rightarrow v' = v \frac{b}{h}; v' = 0,2 \text{ см/с.}$$

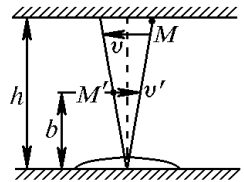


Рис. 12.5

**Задача 12.5.** Тонкая плосковогнутая линза с фокусным расстоянием  $F = 15$  см приклеена плоской стороной к стенке аквариума, заполненного водой  $n = 4/3$ . (На линзу под углом  $\alpha$  к главной оптической оси падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии  $h$  от её оптического центра, не изменяет своего направления.

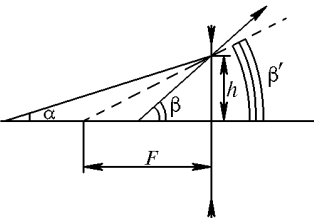


Рис. 12.6

Найти  $h$ , если  $\text{tg} \alpha = 0,08$  (МФТИ, 1993 г.).

**Решение.** Если бы за линзой не было аквариума, то

$$\beta - \alpha = \varphi_F. \tag{12.4}$$

Наличие аквариума приводит к тому, что

$$\beta = n\beta', \tag{12.5}$$

где  $\beta'$  – угол между лучом в воде и главной оптической осью (рис. 12.6). По условию  $\beta' = \alpha$ . Решая (12.4) и (12.5), получим:

$$\varphi_F = (n-1)\alpha .$$

С другой стороны,  $\varphi_F = h/F$ ,  $h = F(n-1)\alpha$ . Численная подстановка дает:

$$h = 0,4 \text{ см.}$$

*Указание:* не переписывайте условия контрольных вопросов и задач! Сразу записывайте их решение.

### Контрольные вопросы

1. Из кабины автомобиля далёкие неровности дороги днём видны хуже, чем ночью в свете фар автомобиля. Почему?
2. Стрелка  $AB$  расположена перпендикулярно плоскости зеркала  $M$  (рис. 1). Покажите штриховкой ту область, из которой можно одновременно видеть предмет  $AB$  и его изображение в зеркале  $M$ .

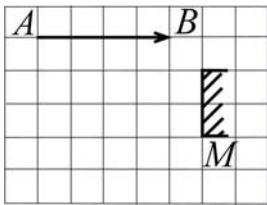


Рис. 1

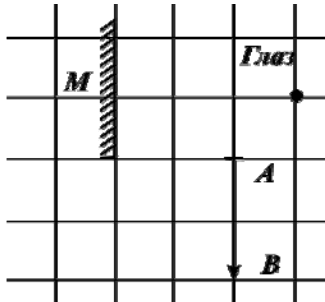


Рис. 2

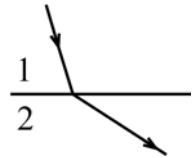


Рис. 3

3. На сколько клеток и в каком направлении наблюдателю  $A$  следует переместить голову (глаз), чтобы видеть в зеркале (рис. 2) всё изображение стрелки  $AB$ ?

- а) стрелка видна полностью;
- б) на 1 клетку влево;
- в) на 1 клетку вверх;
- г) на 1 клетку вверх и на одну клетку влево.

4. На рис. 3 показан ход узкого пучка света, проходящего из среды 1 в среду 2. В какой среде скорость света больше?

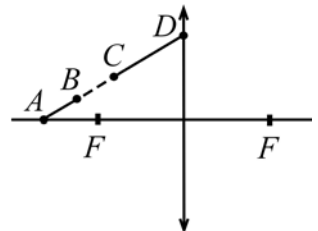


Рис. 4

5. Постройте изображения предметов  $AB$  и  $CD$ , которые даёт тонкая положительная линза (рис. 4).

6. Две плосковыпуклые линзы с одинаковым фокусным расстоянием имеют разные радиусы кривизны выпуклых поверхностей. Какая из линз изготовлена из вещества с меньшим показателем преломления?

7. Рассеивающая линза  $L_1$  даёт мнимое изображение  $S_1$  точечного источника  $S$  (рис. 5), не лежащего на главной оптической оси этой линзы. За линзой находится диафрагма  $D$  (непрозрачный экран с отверстием). Покажите штриховкой область, из которой наблюдатель может видеть изображение  $S_1$ .

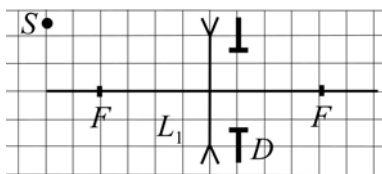


Рис. 5

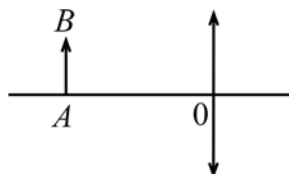


Рис. 6

8. Перпендикулярно главной оси собирающей линзы расположена стрелка  $AB$  (рис. 6). Какое из утверждений истинное:

- а) мнимое изображение стрелки может быть как увеличенным, так и уменьшенным;
- б) мнимое изображение стрелки может быть как прямым, так и перевёрнутым;
- в) мнимое изображение стрелки может находиться как справа, так и слева от переднего фокуса;
- г) мнимое изображение стрелки может находиться как справа, так и слева от стрелки.

9. Когда оптическая сила глаза больше: при рассматривании близких или удалённых предметов?

10. Плосковыпуклую линзу с фокусным расстоянием  $F_1 = 20$  см и плосковогнутую линзу с фокусным расстоянием  $F_2 = -30$  см соединили вместе плоскими сторонами. Чему равно фокусное расстояние  $F_3$  составной линзы?

### Задачи

**Задача 1.** На полу стоит большое плоское зеркало  $M$ , отклоненное от вертикали на угол  $\alpha = 4,87^\circ$  (рис. 7). С какого максимального расстояния  $L$  от нижнего края зеркала человек ростом  $H = 170$  см сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?

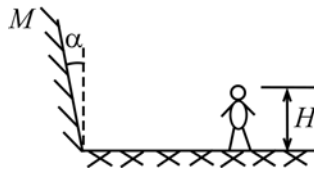


Рис. 7

**Задача 2.** По направлению к центру кривизны вы-

пуклого сферического зеркала радиуса  $R$  со скоростью  $v_0$  летит комар. Вычислите скорость изображения комара в тот момент, когда он находится на расстоянии  $L = 2R$  от поверхности зеркала. В каком направлении движется это изображение: к центру сферы или от центра?

**Задача 3.** Минимальный угол  $\delta$  отклонения света наблюдается при симметричном ходе лучей в трёхгранной призме. Это явление удобно использовать для определения показателя преломления  $n$  материала призмы. Выразите показатель преломления  $n$  через преломляющий угол  $\alpha$  и минимальный угол отклонения  $\delta$  (рис. 8).

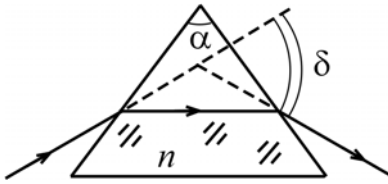


Рис. 8

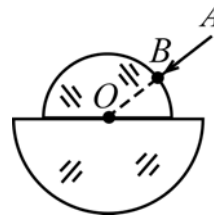


Рис. 9

**Задача 4.** Два концентрических полушара, изготовленных из стекла с разными показателями преломления, соединили так, что их центры совпали (рис. 9). С помощью циркуля и линейки без делений постройте дальнейший ход луча  $AB$  сквозь оба полушария, если отношение их радиусов равно отношению показателей преломления.

**Задача 5.** Высокий прямоугольный сосуд разделён вертикальной перегородкой на два отсека (рис. 10). Первый отсек заполнен жидкостью с показателем преломления  $n_1 = 1,5$ , а второй – жидкостью с показателем преломления  $n_2 = 1,2$ . При каких углах падения  $\varphi$  узкого светового пучка на дно первого отсека хотя бы часть излучения сможет проникнуть во второй отсек. Все вертикальные стенки и дно сосуда являются тонкими прозрачными плоскопараллельными пластинами с показателем преломления  $n_c > 1,2$ .

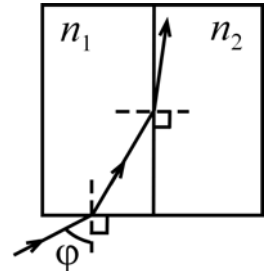


Рис. 10

**Задача 6.** Вершина  $A$  прямоугольного треугольника  $ABC$  лежит в фокусе рассеивающей линзы (рис. 11). Площадь изображения треугольника в 32 раза меньше площади самого треугольника. Определите, с каким увеличением изображается катет  $BC$ .

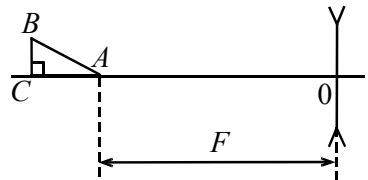


Рис. 11

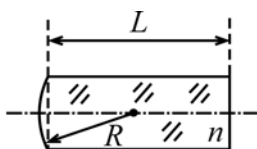


Рис. 12

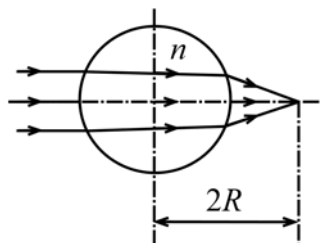


Рис. 13

**Задача 7\*** . Плосковыпуклая линза (рис. 12) толщиной  $L = 6$  см и радиусом кривизны выпуклой части  $R = 3$  см изготовлена из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . На каком расстоянии  $x$  от плоской поверхности линзы фокусируется узкий пучок лучей падающих на выпуклую поверхность параллельно главной оптической оси?

**Задача 8\*** . Узкий пучок света проходит через центр стеклянного сферического сосуда радиуса  $R$ , заполненного прозрачной жидкостью, и фокусируется на расстоянии  $2R$  от его центра (рис. 13). Вычислите показатель преломления жидкости. Что это за жидкость?

*Примечание.*

Жидкость	Вода	Этиловый спирт	Хлороформ	Бензин	Масло корицы
$n$	4/3	1,36	1,45	1,50	1,60

*Указание.* Один из возможных способов решения задач №8, 9 состоит в следующем: толстую линзу мысленно разбивают на плоскопараллельную пластинку и одну или две тонкие плосковыпуклые линзы.