Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Системы уравнений

Задание №3 для 8-х классов

(2010 – 2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2010

Составитель: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 8-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2010, 20с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 10 января 2011г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Яковлева Тамара Харитоновна
Подписано20.10.10. Формат 60х90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25
Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 1500. Заказ №2-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§ 1. Линейные уравнения с двумя переменными

В первом задании мы рассмотрели линейные уравнения с одной переменной. Например, уравнения $2x+5=0$, $3x+(8x-1)+9=0$ являются линейными уравнениями с переменной x. Уравнение, содержащее переменные x и y, называется уравнением с двумя переменными. Например, уравнения $2x-3y=5$, $x^2+xy-y^2=7$ являются уравнениями с двумя переменными.

Уравнение вида $ax+by=c$ называется линейным уравнением с двумя переменными, где x и $y-$переменные, $a, b, c-$некоторые числа.

Например, уравнения $2x+y=3, x-y=0$ являются линейными уравнениями с двумя переменными.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Например, $x=3$, $y=4$ является решением уравнения $2x+3y=18$, будем эту пару чисел записывать так $(3;4)$. Очевидно, что пара чисел $(4;3)$ не является решением уравнения, т.к. $2\cdot 4+3\cdot 3=17\neq 18.$ При нахождении решений с двумя переменными на первом месте в паре чисел пишем значение для переменной x, а на втором месте – значение переменной y.

Если каждое решение одного уравнения является решением второго уравнения и обратно, то данные уравнения называются равносильными. Например, решения уравнений $2x+y=3$ и $4x+2y=6$ совпадают, следовательно, эти уравнения равносильные.

Справедливы следующие правила при решении уравнений с двумя переменными:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;
2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Укажите три различных решения для уравнения

$$3x + y - 2 = 0.$$

Δ Если $x = 0$, то $y = 2$; если $y = 0$, то $x = \dfrac{2}{3}$; если $x = 1$, то $y = -1$.

Таким образом, пары чисел $(0;2)$, $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$, $(1;-1)$ являются решениями данного уравнения. Заметим, что данное уравнение имеет бесконечно много решений. Для заданного значения x значение $y = 2 - 3x$, т.е. любая пара чисел $(x;\ 2 - 3x)$, где $x -$ любое число, является решением уравнения. ▲

Рассмотрим координатную плоскость Oxy и отметим на ней все точки $(x;y)$, для которых пара чисел x и y является решениями уравнения. Например, рассмотрим уравнение $y = 2$. Этому уравнению удовлетворяют все пары чисел $(x;2)$. Точки, для которых $x -$ любое число, а $y = 2$, лежат на прямой $y = 2$. Эта прямая параллельна оси x и проходит через точку $(0;2)$ (см. рис. 1).

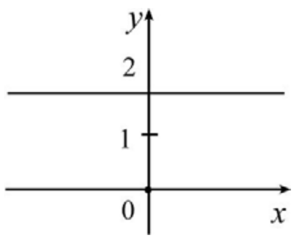

Рис. 1

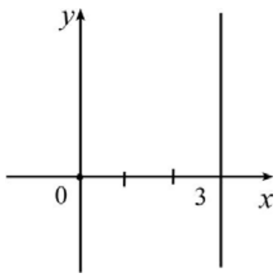

Рис. 2

Рассмотрим уравнение $x = 3$. Каждая пара чисел, являющаяся решением данного уравнения, изображается точкой с координатами x и y на координатной плоскости Oxy. Решениями данного уравнения являются пары чисел $(3; y)$. Точки с координатами $x = 3$ и y лежат на прямой $x = 3$, эта прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $(3; 0)$ (см. рис. 2).

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного уравнения.

На рис. 1 графиком уравнения является прямая $y = 2$, на рис. 2 графиком уравнения является прямая $x = 3$.

Рассмотрим теперь уравнение $2x + 3y - 1 = 0$. Выразим переменную y через x, получаем $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$, это уравнение задаёт линейную функцию, и нам известно, что её графиком является прямая. Чтобы построить эту прямую, достаточно рассмотреть две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению, а затем через эти две точки провести прямую. При $x = 0$ $y = \frac{1}{3}$ и при $x = \frac{1}{2}$ $y = 0$. График данного уравнения приведён на рис. 3.

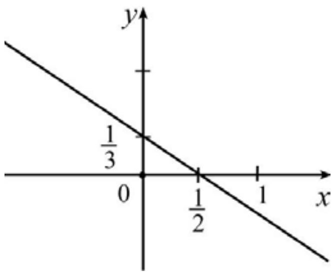

Рис. 3

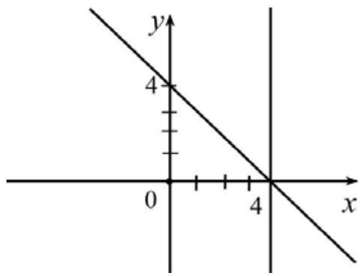

Рис. 4

Рассмотрим уравнение $(x - 4)(x + y - 4) = 0$. Произведение двух скобок равно нулю, каждая скобка может равняться нулю. Наше уравнение распадётся на два уравнения: $x = 4$ и $x + y - 4 = 0$. Графиком первого уравнения является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(4;0)$. Графиком второго уравнения является график линейной функции $y=4-x$, эта прямая проходит через точки $(4;0)$ и $(0;4)$. График данного уравнения приведён на рис. 4.

Пример 2. Постройте график уравнения $|x|+|y|=1$.

Δ Этот пример можно решать двумя способами. Пусть $x\geq 0$ и $y\geq 0$, точки с такими координатами лежат в первой четверти. Получаем уравнение $x+y=1$, так как $|x|=x$ и $|y|=y$. Графиком данного уравнения является прямая, проходящая через точки $A(1;0)$ и $B(0;1)$. Графику исходного уравнения принадлежат точки полученной прямой, лежащие в первой четверти, т.е. графику принадлежат точки отрезка AB, где $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

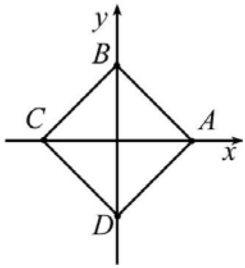

Рис. 5

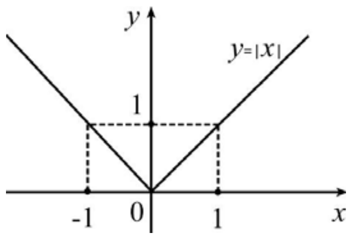

Рис. 6

Пусть теперь $x\leq 0$ и $y\geq 0$, тогда получаем уравнение $-x+y=1$, рассматриваем точки полученной прямой, лежащие во второй четверти. Это будет отрезок BC, где $C(-1;0)$. При $x\leq 0$, $y\leq 0$ получим отрезок CD, где $D(0;-1)$, и при $x\geq 0$, $y\leq 0$ получим отрезок DA. Таким образом, график данного уравнения состоит из точек квадрата $ABCD$.

Этот пример можно решать другим способом. Пусть $y\geq 0$, тогда наше уравнение эквивалентно уравнению $y=1-|x|$. В первом задании мы строили график функции $y=|x|$ (см. рис. 6). График функции $y=-|x|$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика функции $y=|x|$. (см. рис. 7). График функции $y=1-|x|$ получается из графика функции $y=-|x|$

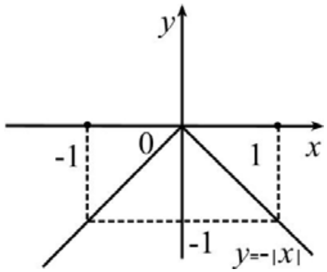

Рис. 7

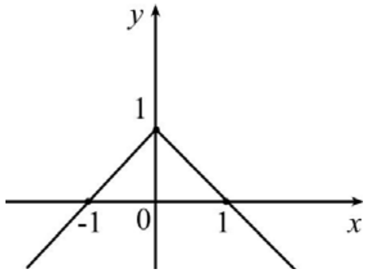

Рис. 8

сдвигом вдоль оси Oy на единицу вверх (см. рис. 8). У полученного графика рассматриваем только точки для которых $y \geq 0$. Получим ломаную ABC с рис. 5.

Далее рассматриваем $y \leq 0$, получим, что графиком уравнения при $y \leq 0$ является ломаная CDA с рис. 5. В итоге получим квадрат $ABCD$ с рис. 5. ▲

Пример 3. Найдите все решения уравнения $xy=6$, для которых x и y являются натуральными числами.

Δ Очевидно, что натуральные числа x и y являются делителями числа 6. Поэтому x и y могут принимать значения 1; 2; 3; 6. Следовательно, искомыми решениями являются числа (1;6), (2;3), (3;2), (6;1). ▲

Пример 4. Найти все решения уравнения $x^2+4x=y^2+2y+8$, для которых значения x и y являются целыми числами.

Δ Обычно такие примеры формулируют так: найти все решения данного уравнения в целых числах.

Преобразуем данное уравнение: $x^2+4x+4-4=y^2+2y+1+7$, $(x+2)^2=(y+1)^2+11$, $(x+2)^2-(y+1)^2=11$, $(x+2-y-1)\cdot(x+2+y+1)=11.$ Если x и y целые числа, то выражения, стоящие в скобках, являются целыми числами. А это могут быть числа ±1 и $\pm11.$ Решаем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2-y-1=1, \\ x+2+y+1=11; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=11, \\ x+2+y+1=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2-y-1=-1, \\ x+2+y+1=-11; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=-11, \\ x+2+y+1=-1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем 4 решения: (4; 4), (4; – 6), (– 8; – 6), (– 8; 4).

§ 2. Системы линейных уравнений

Решение многих задач сводится к решению систем линейных уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение в верное числовое равенство.

Например, пара чисел (2;3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ x+5y=17, \end{cases}$$

а пара чисел (1;1) не является решением системы, т.к. эта пара не является решением каждого из уравнений системы.

Пример 1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2y+3x=8, \\ y-x=-1? \end{cases}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-\frac{3}{2}x+4,$ а второе уравнение системы в виде $y=x-1.$ Мы получили две линейные функции, графиками которых являются прямые с разными угловыми коэффициентами. Вам известно, что такие прямые пересекаются в одной точке. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых, приравняем значения для y. Получаем $-\frac{3}{2}x+4=x-1,\quad -\frac{3}{2}x-x=-4-1,$

$-\frac{5}{2}x=-5;\quad x=2,$ тогда $y=2-1=1.$ Таким образом, система имеет единственное решение (2;1). ▲

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x+y=5,\\4x+2y=10.\end{cases}$$

Δ Из первого уравнения следует, что $y=5-2x,$ а из второго уравнения получим $y=5-2x.$ Графики этих уравнений совпадают. Уравнению удовлетворяет любая пара чисел, $(x,\quad 5-2x),$ где x любое число, а $y=5-2x.$ Система уравнений имеет бесконечно много решений. ▲

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=7,\\2x+2y=10.\end{cases}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-x+7$ и второе уравнение системы в виде $y=-x+5.$ Графиками этих уравнений являются две параллельные прямые, которые не пересекаются, т.к. $-x+7=-x+5,\quad x\cdot 0=-2,$ а это уравнение не имеет решений. ▲

При решении систем применяют метод подстановки, метод сложения и метод введения новых переменных.

Покажем на конкретном примере, как применяется метод подстановки.

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x+y=4,\\5x+3y=11.\end{cases}$

Δ Из первого уравнения выражаем $y=4-2x$ и это значение для y подставляем во второе уравнение системы, получаем:

$5x+3(4-2x)=11,\quad 5x+12-6x=11,\quad -x=-1,\quad x=1$. Подставляем это значение x в выражение для y, получаем: $y=4-2=2$. Пара чисел (1;2) является единственным решением системы уравнений. ▲

Теперь приведём пример, где применяется метод сложения.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 2x+2y=10. \end{cases}$$

Δ В этих уравнениях коэффициенты при переменной y отличаются знаком. Сложив уравнения системы, получаем

$$3x-2y+2x+2y=5+10,\quad 5x=15,\quad x=3.$$

Подставляем найденное значение x, например, в первое уравнение системы, получаем: $3\cdot 3-2y=5,\quad -2y=-4,\quad y=2$. Система имеет единственное решение (3;2). ▲

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x+3y=11, \\ 3x+7y=13. \end{cases}$$

Δ Уравняем коэффициенты при x обоих уравнений, для этого умножим обе части первого уравнения на 3 и обе части второго уравнения на (– 4), получим систему

$$\begin{cases} 12x+9y=33, \\ -12x-28y=-52. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $12x+9y-12x-28y=33-52$,

$$-19y=-19,\quad y=1.$$

Подставляем это значение для y в первое уравнение системы, получаем: $12x+9=33,\quad 12x=24,\quad x=2$. Пара чисел (2;1) является единственным решением системы. ▲

Покажем на конкретном примере, как применяется метод введения новых переменных.

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{9}{3x+y}=2, \\ \dfrac{7}{2x-y}-\dfrac{18}{3x+y}=5. \end{cases}$

Δ Введём новые переменные: $u=\dfrac{1}{2x-y}$, $v=\dfrac{1}{3x+y}$. Для переменных u и v получим систему уравнений

$$\begin{cases} u+9v=2, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 2, получим систему

$$\begin{cases} 2u+18v=4, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы, получим $9u=9$, $u=1$. Из первого уравнения при $u=1$ следует, что $v=\dfrac{1}{9}$.

Из условия $\dfrac{1}{2x-y}=1$ следует, что $2x-y=1$, а из условия $\dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{1}{9}$ следует, что $3x+y=9$. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+y=9. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $5x=10$, $x=2$, из первого уравнения получаем $4-y=1$, $y=3$.

Ответ: $(2;3)$. ▲

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10x-5y-3z=-9, \\ 6x+4y-5z=-1, \\ 3x-4y-6z=-23. \end{cases}$$

Δ Уравняем коэффициенты при x в первом и втором уравнениях, для этого умножим обе части первого уравнения на 6, а второго уравнения – на 10, получаем:

$$\begin{cases} 60x-30y-18z=-54, \\ 60x+40y-50z=-10. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения полученной системы первое уравнение, получаем: $70y-32z=44,\ 35y-16z=22.$

Из второго уравнения исходной системы вычитаем третье уравнение, умноженное на 2, получаем: $4y+8y-5z+12z=-1+46,$ $12y+7z=45.$

Теперь решаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 35y-16z=22, \\ \ \ 12y+7z=45. \end{cases}$$

К первому уравнению новой системы, умноженному на 7, прибавляем второе уравнение, умноженное на 16, получаем:

$$35\cdot 7y+12\cdot 16y=22\cdot 7+45\cdot 16,$$

$245y+192y=154+720,\quad 437y=874,\quad y=2.$ Подставляем $y=2$ в уравнение $12y+7z=45,$ получаем: $24+7z=45,\ 7z=21,\ z=3.$

Теперь подставляем $y=2,\ z=3$ в первое уравнение исходной системы, получаем: $10x-5\cdot 2-3\cdot 3=-9,\quad 10x-10-9=-9,\quad 10x=10,$ $x=1.$

Ответ: $(1;2;3).$ ▲

§ 3. Решение систем с параметром и с модулями

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} ax+4y=2a, \\ x+ay=a. \end{cases}$

В этой системе, на самом деле, три переменные, а именно: $a, x, y.$ Неизвестными считают x и y, a называют параметром. Требуется найти решения (x, y) данной системы при каждом значении параметра $a.$

Покажем, как решают такие системы. Выразим переменную x из второго уравнения системы: $x = a - ay.$ Подставляем это значение для x в первое уравнение системы, получаем:

$$a(a - ay) + 4y = 2a,$$

$$(2 - a)(2 + a)y = a(2 - a).$$

Если $a = 2,$ то получаем уравнение $0 \cdot y = 0.$ Этому уравнению удовлетворяет любое число $y,$ и тогда $x = 2 - 2y,$ т. е. при $a = 2$ пара чисел $(2 - 2y; y)$ является решением системы. Так как y может быть любым числом, то система при $a = 2$ имеет бесконечно много решений.

Если $a = -2,$ то получаем уравнение $0 \cdot y = 8.$ Это уравнение не имеет ни одного решения.

Если теперь $a \neq \pm 2,$ то $y = \dfrac{a(2 - a)}{(2 - a)(2 + a)} = \dfrac{a}{2 + a},$

$$x = a - ay = a - \frac{a^2}{2 + a} = \frac{2a}{2 + a}.$$

Ответ: При $a = 2$ система имеет бесконечно много решений вида $(2 - 2y; y),$ где $y -$ любое число;

при $a = -2$ система не имеет решений;

при $a \neq \pm 2,$ система имеет единственное решение $\left(\dfrac{a}{2 + a}; \dfrac{2a}{2 + a}\right).$ ▲

Мы решили эту систему и установили, при каких значениях параметра a система имеет одно решение, когда имеет бесконечно много решений и при каких значениях параметра a она не имеет решений.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2|x|-3|y-1|=3, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$$

Δ Из второго уравнения системы выражаем x через y, получаем $x=\dfrac{2y+5}{3}$, подставляем это значение для x в первое уравнение сис-

темы, получаем: $\dfrac{2}{3}|2y+5|-3|y-1|=3;\quad \dfrac{4}{3}\left|y+\dfrac{5}{2}\right|-3|y-1|=3.$

Выражение $y+\dfrac{5}{2}=0$ при $y=-\dfrac{5}{2}$. Если $y>-\dfrac{5}{2}$, то $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=y+\dfrac{5}{2}$; если $y<-\dfrac{5}{2}$, то $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=-y-\dfrac{5}{2}$.

Выражение $y-1=0$, если $y=1$. Если $y>1$, то $|y-1|=y-1$, а если $y<1$, то $|y-1|=1-y$.

Если $y\ge 1$, то $|y-1|=y-1$ и $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=y+\dfrac{5}{2}$, получаем уравнение:

$$\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)-3(y-1)=3,\quad \frac{4}{3}y+\frac{10}{3}-3y+3=3,\quad -\frac{5}{3}y=-\frac{10}{3},\ y=2.$$

Тогда $x=\dfrac{1}{3}(2\cdot 2+5)=3$. Число $2>1$, так что пара (3;2) является решением системы.

Пусть теперь $-\dfrac{5}{2}\le y<1$, тогда $|y-1|=1-y$; $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=y+\dfrac{5}{2}$. Для нахождения y получаем уравнение $\dfrac{4}{3}\left(y+\dfrac{5}{2}\right)+3y-3=3$,

$$\frac{4}{3}y+\frac{10}{3}+3y=6,\ \frac{13}{3}y=\frac{8}{3},\ \ y=\frac{8}{13};$$

$$x=\frac{1}{3}(2y+5)=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{13}+5\right)=\frac{27}{13}.$$

Число $\frac{8}{13}$ больше $\left(-\frac{5}{2}\right)$, но меньше, чем 1, поэтому пара чисел $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$ является решением системы.

Если $y<-\frac{5}{2}$, то получаем уравнение: $-\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3y-3=3$, $-\frac{4}{3}y-\frac{10}{3}+3y=6$, $\frac{5}{3}y=\frac{28}{3}$, $y=\frac{28}{5}$. Это значение больше, чем $\left(-\frac{5}{2}\right)$, поэтому решений нет.

Таким образом, система имеет два решения (3;2) и $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$. ▲

§ 4. Решение задач с помощью систем уравнений

Пример 1. Путь от города до посёлка автомобиль проезжает за 2,5 часа. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 часа он пройдёт путь на 15 км больший, чем расстояние от города до посёлка. Найдите это расстояние.

Δ Обозначим через S расстояние между городом и посёлком и через V скорость автомобиля. Тогда для нахождения S получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} 2,5V=S, \\ (V+20)2=S+15. \end{cases}$$

Из первого уравнения $V=\frac{S}{2,5}=\frac{2}{5}S,$ подставляем это значение V во второе уравнение: $\left(\frac{2}{5}S+20\right)2=S+15,\ \frac{1}{5}S=25,\ S=125.$

Ответ: 125 км. ▲

Пример 2. Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если эти цифры поменять местами, то получится число, которое на 27 больше исходного. Найдите эти числа.

Δ Пусть данное число $\overline{ab},$ т.е. число десятков равно $a,$ а число единиц равно $b.$ Из первого условия задачи имеем: $a+b=15.$ Если из числа $\overline{ba}$ вычесть число $\overline{ab},$ то получится 27, отсюда получаем второе уравнение: $10b+a-(10a+b)=27.$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=15, \\ -9a+9b=27, \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=15, \\ a-b=-3. \end{cases}$$

Сложим уравнения последней системы, получаем: $2a=12,\ a=6,$ тогда $b=9.$ Заданное число 69, второе число 96.

Ответ: 69 и 96. ▲

Пример 3. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получилось 140 т стали с содержанием никеля 30%?

ΔОбозначим через x массу стали с 5% содержанием никеля и через y массу стали с 40% содержанием никеля. Тогда $x+y=140.$ В x тоннах стали содержится $0,05x$ никеля, а в y тоннах стали содержится $0,4y$ никеля. Масса никеля равна $0,05x+0,4y$ и составляет 30% от 140 т, т.е. $\frac{3}{10}140$ т $=42$ т. Получили второе уравнение

$$0,05x+0,4y=42.$$

Умножим обе части уравнения на 20, получим: $x+8y=840.$ Для нахождения x и y получили систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=140, \\ x+8y=840. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое уравнение, получим: $7y=700,\quad y=100,$ тогда $x=140-y=40.$

Ответ: 40 т, 100 т. ▲

Пример 4. Оператор ЭВМ, работая с учеником, обрабатывает задачу за 2 ч 24 мин. Если оператор будет работать 2 ч, а ученик 1 ч, то будет выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется оператору и ученику в отдельности на обработку задачи?

Δ Обозначим всю работу за 1, производительность оператора за x и производительность ученика за $y.$ Учитываем, что

$$2\text{ ч }24\text{ мин}=2\frac{2}{5}\text{ ч}=\frac{12}{5}\text{ ч}.$$

Из первого условия задачи следует, что $(x+y)\frac{12}{5}=1.$ Из второго условия задачи следует, что $2x+y=\frac{2}{3}.$ Получили систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)\frac{12}{5}=1, \\ 2x+y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решаем эту систему методом подстановки:

$$y=\frac{2}{3}-2x;\ \left(x+\frac{2}{3}-2x\right)\frac{12}{5}=1;\ \left(\frac{2}{3}-x\right)\frac{12}{5}=1;\ \frac{12}{5}x=\frac{8}{5}-1;$$

$$\frac{12}{5}x=\frac{3}{5};\ x=\frac{1}{4};\quad y=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: Для оператора понадобится 4 часа ($1:\frac{1}{4}=4$), а ученику – 6 часов ($1:\frac{1}{6}=6$). ▲

Контрольные вопросы

1(6). Сколько корней имеет уравнение:

а) $(x-10)(x+12)=0$; б) $(x-1)^2+(x+3)^2=0$;

в) $5x-1=5(x-3)$; г) $6(x-4)=12\cdot 0,5x-24$;

д) $(-x)^{10}=x^{10}$; е) $(-x)^{11}=x^{11}$.

2(4). Постройте графики уравнений:

а) $2x-y+3=0$; б) $(x-2)(y+3)(x+y+2)=0$; в) $y=2-|x+1|$;

г) $|y-2|=2x+1$.

3(2). Решите уравнение $3x+10y=59$ в натуральных числах.

4(2). Решите уравнение $(2x+1)(y-3)=6$ в целых числах.

5(2). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4x-5y=9,\\7x+3y=4\end{cases}$$

методом подстановки.

6(2). Решите систему $\begin{cases}5x+2y=4,\\8x-3y=25,\end{cases}$ применяя метод сложения уравнений.

7(3). Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases}6x-7y=3,\\12x-14y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}9x+2y=3,\\27x+6y=9;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-y=5,\\2x+3y=3.\end{cases}$

8(2). При каких значениях параметра b система $\begin{cases} bx - 7y = -21, \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

9(3). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |y-3| = 2, \\ |x-5| = 3. \end{cases}$$

10(4). Задумано два числа. Если к первому числу прибавить утроенное второе число, то получится 151. Если из утроенного первого числа вычесть второе число, то получится 43. Найти эти числа.

Решить эту задачу двумя способами: с помощью одного линейного уравнения и с помощью системы линейных уравнений.

11(4). Два велосипедиста выезжают навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 400 км. Оба едут с постоянной скоростью. Если первый выедет на 5 часов раньше второго, то они встретятся через 5 часов после выезда второго. Если второй выедет на 2 часа раньше первого, то он встретит первого через 6 часов после выезда первого. Найдите скорости велосипедистов.

12(4). Смешали 30 % – ный и 50 % – ный растворы азотной кислоты по массе и получили 45 %– ный раствор. Найдите отношение массы 30 % – ного раствора к массе 50 % – ного раствора.

Задачи

Решите систему уравнений (1 – 3):

1(3). $$\begin{cases} \dfrac{4}{x-y} + \dfrac{12}{x+y} = 3, \\ \dfrac{8}{x-y} - \dfrac{18}{x+y} = -1. \end{cases}$$

2(3). $$\begin{cases} (x+y+1)(x-2y+3) = 0, \\ (x-y+2)(3x+3y-1) = 0. \end{cases}$$

3(3). $\begin{cases} \left| |x-1| - |y-2| \right| = 4, \\ x + y = 11. \end{cases}$

4(4). Решите систему $\begin{cases} ax + 2y = 3a - 5, \\ 8x + ay = 8a - 18 \end{cases}$ для любого значения параметра a.

5(3). Решите систему уравнений с неизвестными x, y, z :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -10, \\ 4x - 2y - 3z = 27, \\ -5x + 4y + 2z = -28. \end{cases}$$

6(3). Задано двузначное число. Если разделить его на сумму его цифр, то в частном получится 6 и в остатке 2. Данное число больше числа, заданного теми же цифрами, но в другом порядке, на 18. Найдите заданное число.

7(3). Катер спустился вниз по реке на 36 км, а затем вернулся обратно, затратив на весь путь 3 часа 30 мин. Найдите собственную скорость катера, если известно, что 12 км по течению реки он проплывает на 10 минут быстрее, чем против течения.

8(4). В лаборатории имеется 2 кг раствора, содержащего 28% некоторой кислоты, и 4 кг раствора, содержащего 36% этой же кислоты. Найдите наибольшее количество 30% раствора кислоты, который можно получить из этих растворов.

9(5) Два экскаватора разной мощности рыли яму. Вдвоём они вырыли яму объёмом 49 м^3 за 1,5 часа. Если бы первый работал один, то он вырыл бы её в три раза быстрее, чем второй. За сколько часов они вырыли бы эту яму, если бы каждый по очереди вырыл бы по полямы?

10*(4). (Задача предлагалась в МГУ в 2008 г. на социологическом факультете).

Среди учащихся старших классов провели опрос: кто любит волейбол, а кто баскетбол. Оказалось, что 52 % любителей волейбола любят и баскетбол, а 65 % любителей баскетбола любят и волейбол. Зато 36 % всех опрошенных не любят ни волейбол, ни баскетбол. Сколько процентов опрошенных любят только одну из этих игр, но не любят другую? Каким при этом могло быть наименьшее число опрошенных?