Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Тригонометрические уравнения, системы, неравенства

Задание №3 для 11-х классов

(2010-2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2010

Составитель: Ф.О. Сергеев, преподаватель ФЗФТШ при МФТИ.
Математика: задание №3 для 11-х классов (2010-2011 учебный год). - М.: МФТИ, 2010, 28с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 04 декабря 2010г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Сергеев Фёдор Олегович
Подписано в печать 15.10.10. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5
Уч.-изд. л. 1,33 Тираж 1200. Заказ №2-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

e-mail: ***zftsh@mail.mipt.ru***

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Методический материал задания представляет собой систематизированное повторение методов и приемов решения задач тригонометрии. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения подобраны с учетом требований ЕГЭ и на уровне задач вступительных экзаменов (олимпиад) ведущих ВУЗов. Более сложные задачи помечены звездочкой *, они требуют большего внимания и усилий.

§1. Простейшие тригонометрические уравнения

Напомним формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

$$\cos x = a; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n \text{ при } |a| \le 1, \tag{1}$$

$$\sin x = a; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \text{ при } |a| \le 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ a \in R, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} x = a; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ a \in R, \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, а область значений числа a определяется из свойств тригонометрических функций (в дальнейшем, если не сказано обратного, будем считать, что $k, l, m, n \in Z$).

Целочисленные параметры в различных множествах решений одного уравнения можно обозначать как разными буквами, так и одной буквой. В тех же случаях, когда элементы множеств сравниваются между собой, а также при решении тригонометрич
еских систем следует использовать различные буквы для обозначения целочисленных параметров.

В ряде случаев для корней уравнения $\sin x = a \quad (|a| \le 1)$ удобнее использовать формулу

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k. \end{array}\right. \tag{2'}$$

Формулы (1)-(2) и $(2')$ верны при всех $|a| \le 1$. Для случаев $a = 0, \pm 1$, они имеют более простой вид, который полезно запомнить:

а) $\sin x = 0,\ x = \pi n$; г) $\cos x = 0,\ x = \pi/2 + \pi n$;
б) $\sin x = 1,\ x = \pi/2 + 2\pi n$; д) $\cos x = 1,\ x = 2\pi n$;
в) $\sin x = -1,\ x = -\pi/2 + 2\pi n$; е) $\cos x = -1,\ x = \pi(2n + 1)$.

Замечание. **Не может быть** зачтено решение задачи, если, например, школьник (абитуриент), получив простейшее уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$, пишет x=(-1)$^{\mathbf{n}}$arcsin(1/3)+$\pi\boldsymbol{m}$, где n и m обозначают различные целые числа. Приведённая формула даёт также и решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$ – убедитесь в этом самостоятельно. Также **не может быть зачтено** решение уравнения, если в ответе присутствует запись вида $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{7}}{2} + \pi n$, т.к. $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$.

Все тригонометрические уравнения и системы с помощью преобразований сводятся, как правило, к решению одного или нескольких простейших уравнений. Приведем примеры решения таких уравнений.

Пример 1. Решить уравнения

а) $2\sin(x^2+1) = 1$; б) $\cos 2x + \cos x = 2$; в) $2\cos x - 3\sin x = 0$.

Решение.

а) Согласно формуле (2) из уравнения $\sin(x^2+1) = \frac{1}{2}$ следует

$$x^2+1 = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ т.е. } x^2 = (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{6} - 1 + \pi n, \ n = 1, 2, ..., \text{ т.к. } x^2 \geq 0.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{(-1)^{\mathrm{n}}\frac{\pi}{6} - 1 + \pi n}, n \in \mathrm{N}.$

б) Используем формулу $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и приводим уравнение $\cos 2x + \cos x = 2$ к виду $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ Полагаем $\cos x = t.$ Квадратное уравнение $2t^2 + t - 3 = 0$ имеет корни $t = 1, \mathrm{t} = -\frac{3}{2}$ Т.к. $|\cos x| \leq 1$ то $\cos x = 1, x = 2\pi n.$

Ответ: $x = 2\pi n.$

в) Уравнение $2\cos x - 3\sin x = 0$ равносильно уравнению $tgx = \frac{2}{3}.$

Ответ: $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n.$

Для решения тригонометрических уравнений необходимо хорошо знать основные тригонометрические формулы. Например, формула $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ должна держаться в памяти и в виде $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Также полезно помнить, что $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, а $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$, $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Пример 2. Решить уравнение $8\sin^8 x + 8\cos^8 x - \sin^4 2x = 0$.

Решение. Преобразуем сумму с использованием тригонометрической единицы

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x =$$

$$= \left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^4 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x =$$

$$= \cos^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x.$$

Исходное уравнение равносильно уравнению $\cos^2 2x = 0$. Значит, $\cos 2x = 0; 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

§2. Уравнения, однородные относительно sin*x* и cos*x*, и сводящиеся к ним

Однородными относительно sin*x* и cos*x* называются уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x\cos x + a_2 \sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\sin x\cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0, \qquad (5)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа. Сумма степеней синуса и косинуса в каждом слагаемом левой части уравнения одинакова и равна числу *n*, называемому показателем *однородности.*

Если $a_0 = 0$, то, очевидно, корни уравнения $\cos x = 0$ являются одними из корней исходного уравнения. Далее, полагая $\cos x \neq 0$ и разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим снова однородное уравнение (с показателем однородности $n-1$).

Если же $a_0 \neq 0$, то, очевидно, $\cos x \neq 0$ и обе части однородного уравнения можно разделить на $\cos^n x$, в результате чего получим уравнение:

$$a_0 \mathrm{tg}^n x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} x + a_2 \mathrm{tg}^{n-2} x + \ldots + a_{n-1} \mathrm{tg} x + a_n = 0, \qquad (6)$$

которое простой заменой $t = \mathrm{tg}x$ сводится к стандартному алгебраическому уравнению $a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0.$

Однородное уравнение первого порядка $a \sin x + b \cos x = 0$ решается сведением к $\mathrm{tg}x$: $\mathrm{tg}x = -\dfrac{b}{a}$ (см. пример 1в).

2.1. Однородные уравнения второго порядка и сводящиеся к ним

Пример 3. Решить уравнение $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Равносильное исходному уравнение $3tg^2 x - tgx - 2 = 0$ дает два действительных решения: $tgx = 1, tgx = -\dfrac{2}{3}$.

Отсюда находим две серии решений исходного уравнения.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, x = -arctg\dfrac{2}{3} + \pi m$.

Уравнения, не являющиеся на первый взгляд однородными и содержащие свободные члены (числа), или, например, уравнения, левая часть которых есть однородное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$ с порядком однородности $n = 3$, а правая часть есть $d \cdot \sin x$ (или $d \cdot \cos x$) могут быть сведены к однородным с помощью использования тригонометрической единицы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Этот прием может быть использован при решении задачи 9.

Пример 4. Решить уравнение $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 2$**.**

Решение. Это уравнение равносильно уравнениям

$$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0,$$

$$tg^2 x - 5tgx - 2 = 0.$$

Полагаем $\mathrm{tg}x = t.$ Уравнение $t^2 - 5t - 2 = 0$ имеет корни

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Ответ: $x_1 = arctg\frac{5-\sqrt{33}}{2} + \pi n, x_2 = arctg\frac{5+\sqrt{33}}{2} + \pi m$.

§3. Методы решений некоторых уравнений

3.1. Уравнение вида $\sin kx \pm \cos mx = 0$

Такие уравнения решаются сведением к одной тригонометрической функции, т.е., к виду

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - kx\right) \pm \cos mx = 0$ или $\sin kx \pm \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm mx\right) = 0,$ и применением формул, преобразующих сумму (разность) косинусов или сумму (разность) синусов в произведение.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

Решение. По формуле приведения $\cos 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$, уравнение примет вид $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \sin 3x = 0$.

По формуле $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=0, \frac{\pi}{4}-4x=\frac{\pi}{2}+\pi n, x=-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$$

и $$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0, \frac{\pi}{4}-x=\pi m, x=\frac{\pi}{4}+\pi m$$

Мы заменили $-n$ на n и $-m$ на m, что допустимо, так как n и m обозначают множество целых чисел

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m, x=-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{4}$.

3.2. Решение уравнений вида $F\left(\sin x\pm\cos x;\sin x\cdot\cos x\right)=0$

Уравнения сводятся к алгебраическим заменой $t=\sin x\pm\cos x$**.** Из тождества

$$\left(\sin x\pm\cos x\right)^2=1\pm 2\sin x\cos x$$

получаем $\sin x\cos x=\pm\dfrac{t^2-1}{2}$, тогда уравнение запишется в виде $F\left(t;\pm\dfrac{t^2-1}{2}\right)=0$. Следует иметь в виду, что

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right),$$

поэтому допустимые значения t таковы, что $|t|\le\sqrt{2}$.

Пример 6. Решить уравнение $2\sin 2x-3\cos x-3\sin x+3=0$.

Решение. Заменой $t = \cos x + \sin x$ (тогда $\sin 2x = t^2 - 1$) уравнение приводится к виду $2t^2 - 3t + 1 = 0$ его корни $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$.

Если $\cos x + \sin x = 1,$ то $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; по формуле $(2')$

$$x + \frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \qquad x = \left[\begin{array}{l} 2\pi n, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Уравнение $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$ дает

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n .$$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n, x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Часто, используя замену, учащиеся забывают, что требовалось-то найти x, а не t, и не указывают правильного ответа. Такая небольшая, казалось бы, ошибка на вступительных экзаменах может свести на нет всё решение.

3.3. Метод разложения на множители

Метод разложения на множители широко известен из других областей математики и фактически состоит в том, что громоздкое уравнение с помощью тождественных преобразований сводится к совокупности нескольких более простых уравнений. Применение этого метода в тригонометрии удобнее всего рассмотреть на нескольких примерах.

Пример 7. Решить уравнение $3\cos x \sin 2x + 6\sin 2x - \cos x = 2$.

Решение. Вынося общий множитель первого и второго слагаемых, получаем:

$$3\sin 2x(\cos x + 2) - (\cos x + 2) = 0 ,$$

или

$$(\cos x + 2)(3\sin 2x - 1) = 0 .$$

Так как левая часть этого уравнения определена при всех x, то исходное уравнение распадается на следующие два:

$$\left[\begin{aligned}&\sin 2x = \frac{1}{3},\\&\cos x = -2.\end{aligned}\right.$$

Второе уравнение не имеет решений, а из первого уравнения следует

$$x = \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}.$

Пример 8. Решить уравнение $\sin^3 3x - \cos^3 3x = \cos 6x$.

Решение. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$(\sin 3x - \cos 3x)(\sin^2 3x + \sin 3x\cos 3x + \cos^2 3x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x,$$

$$(\sin 3x - \cos 3x)[1 + \sin 3x\cos 3x + (\cos 3x + \sin 3x)] = 0$$

и распадается на два уравнения:

$$\left[\begin{aligned}&\sin 3x - \cos 3x = 0,\\&1 + \sin 3x\cos 3x + \cos 3x + \sin 3x = 0.\end{aligned}\right.$$

Первое уравнение имеет решение $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n$. Второе заменой $\cos 3x + \sin 3x = t$ (при этом $\cos 3x\sin 3x = \frac{t^2 - 1}{2}$) (см. §3.2.) сводится к уравнению $1 + \frac{t^2 - 1}{2} + t = 0,$

$$t^2 + 2t + 1 = 0,$$

$$(t+1)^2 = 0,$$

$$t = -1.$$

Отсюда $\cos 3x + \sin 3x = -1,$

$$3x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,$$

$$x_2=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi m,$$

$$x_3=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n, x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi m, x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k.$

Пример 9. Решить уравнение $\cos x\cos 4x=\sin 8x\sin 3x$

Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 3x)=\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos 11x).$$

Отсюда получаем $\cos 3x+\cos 11x=0$, и, применяя формулу суммы косинусов, приходим к уравнению: $\cos 7x\cos 4x=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 7x=0,\\ \cos 4x=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7},\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}, x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{4}.$

3.4. Метод введения дополнительного аргумента

Метод введения дополнительного аргумента уже использовался нами в виде $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Также часто в школьных примерах используются тождества вида

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Теперь же разберём общий случай.

Рассмотрим решение уравнений вида

$$a\cos x + b\sin x = c, \tag{7}$$

где *a,b,c* – действительные числа, причём $c \neq 0$ (иначе уравнение становится однородным и решается проще – см. пример 1*в*) и $a^2 + b^2 \neq 0$.

Разделив обе части (7) на $\sqrt{a^2+b^2}$, получаем:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Т.к. $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существуют такие углы α

и β, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ (8)

или $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta.$ (9)

Выберем некоторое значение α, удовлетворяющее системе (8) и некоторое значение β, удовлетворяющее системе (9). Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$\sin\alpha\cos x + \sin x\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\left(x+\alpha\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или $\cos\beta\cdot\cos x + \sin\beta\cdot\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\left(x-\beta\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

<u>Решение этих уравнений существует лишь при условии</u> $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1.$

В ответе нужно *не забыть* указать выбранное значение α или β»

Есть и другие варианты изложения. Но в любом случае надо учитывать четверть, в которой лежит угол α (β). А одна обратная тригонометрическая функция не может определить угол из любой четверти.

Пример 10. Решить уравнение $12\sin x + 5\cos x = 13$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\frac{12}{13}\sin x + \frac{5}{13}\cos x = 1$ и введём вспомогательный угол α: $\cos\alpha = \frac{12}{13}, \sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Угол α, замечаем, лежит в первой четверти тригонометрического круга, берем $\alpha = \arccos\frac{12}{13}$.

Получаем в итоге уравнение: $\sin(x+\alpha) = 1$.

Ответ: $x = -\arccos\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Пример 11. Решить уравнение $12\sin x - 5\cos x = 13\cos 19x$

Решение. Приведём уравнение к виду $\frac{12}{13}\sin x - \frac{5}{13}\cos x = \cos 19x$ сразу видно, что лучше преобразовать левую часть к функции $\cos(x+\alpha)$.

Полагаем $\cos\alpha = \frac{5}{13}, \sin\alpha = \frac{12}{13}$ (берём $\alpha = \arccos\frac{5}{13}$), получаем уравнение $\cos(x+\alpha) + \cos 19x = 0$

Отсюда

$$\cos\left(10x + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(9x - \frac{\alpha}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 10x + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 9x - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{20}\arccos\frac{5}{13} + \frac{\pi}{10}n, x = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{18}\arccos\frac{5}{13} + \frac{\pi}{9}m.$

3.5. Метод оценки

Случается, что предварительная оценка левой и правой частей уравнения помогает сразу решить уравнение или показать, что решений нет.

Пример 12. Решить уравнение $15\sin^{17} 17x + 7\cos^7 7x = 23$.

Решение. Так как $|\sin 17x| \le 1, |\cos 7x| \le 1$, то указанное равенство не выполняется ни при каком значении x. Таким образом, делаем вывод, что уравнение не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 13. Решить уравнение $\sin^2 2x + 1 = \cos^2 5x$.

Решение. Уравнение преобразуется к виду $\sin^2 2x + \sin^2 5x = 0$

Так как оба слагаемых неотрицательны, то равенство достигается только в случае их одновременного равенства нулю: $\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 5x = 0. \end{cases}$

Решаем каждое уравнение в отдельности и отбираем общие корни

Ответ: $x = \pi n$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\cos^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 6x + \frac{1}{2} = \sin 6x \cos 3x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 3x - \sin 6x \cos 3x + \frac{1}{4}\sin^2 6x + \sin^2 x = 0,$$

заметим, что первые три слагаемые составляют полный квадрат:

$$(\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 6x)^2 + \sin^2 x = 0.$$

Последнее уравнение, аналогично предыдущему примеру, равносильно системе: $\begin{cases} \cos 3x - \frac{1}{2}\sin 6x = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения находим $x = \pi n$. Внесем в первое уравнение:

$$\cos 3\pi n - \frac{1}{2}\sin 6\pi n = 0 \Rightarrow \cos 3\pi n = 0.$$

Пришли к противоречию. Уравнение решений не имеет.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 15. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^8 x = 1$

Решение. Учитывая то, что $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$, получаем возможные случаи, удовлетворяющие уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}.$$

Если же оба слагаемых меньше 1, т.е. выполняется система $\begin{cases} |\sin x| < 1, \\ |\cos x| < 1. \end{cases}$, то уравнение не имеет решений. Докажем это.

Т.к. $|\sin x| < 1$, то $\sin^4 x < \sin^2 x$ и т.к. $|\cos x| < 1$, то $\cos^8 x < \cos^2 x$. Таким образом, $\sin^4 x + \cos^8 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, т.е. исходное равенство заведомо неверно.

Ответ. $x = \dfrac{\pi k}{2}$.

Пример 16. Доказать, что уравнение $\sin 4x \sin 5x = 1$ не имеет решений**.**

Доказательство.

$$\sin 4x \sin 5x = 1,$$

$$\cos x - \cos 9x = 2,$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 9x = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \\ 9x = \pi + 2\pi m. \end{cases} \Rightarrow 9x = 18\pi n = \pi + 2\pi m.$$

Но $18n \ne 1 + 2m \mid n, m \in Z \Rightarrow x \in \varnothing.$

3.6 Уравнения с параметрами

Если стоит задача решить уравнение с параметром, то нужно определить, при каких значениях параметра существуют решения, и для <u>всех</u> таких значений найти <u>все</u> решения уравнения. Если хотя бы одно значение параметра не исследовано, решение задачи не является полным.

Пример 17. Решить уравнение $\cos 2x+(p-1)\cos x-p=0.$

Решение.

$$\cos 2x+(p-1)\cos x-p=0.$$

$$2\cos^2 x-1+(p-1)\cos x-p=0;$$

$$2\cos^2 x+(p-1)\cos x-p-1=0,$$

$$D=(p+3)^2.$$

$$\cos x=\frac{-p+1\pm(p+3)}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi n, \\ \cos x=-\dfrac{p+1}{2}. \end{array}\right.$$

Получаем, что при любом p уравнение имеет корни $x=2\pi n$. Если же $-1\le -\dfrac{p+1}{2}<1,$ т.е., при $-3<p\le 1$ кроме указанных корней уравнение имеет также корни $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{p+1}{2}\right)+2\pi m.$

Ответ. При $p\in(-\infty;-3]\cup(1;+\infty)$ – $x=2\pi n$, при $p\in(-3;1]$ – $x=2\pi n$ и $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{p+1}{2}\right)+2\pi m.$

Часто в задачах с параметрами требуется найти такие значения параметра, при которых корни уравнения обладают определенными свойствами – принадлежат некоторому интервалу, принимают определенные значения и т.д.

Пример 18.Найти, при каких значениях параметра p уравнение $\cos 2x+(p-1)\cos x-p=0$ имеет на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ ровно два корня.

Решение. Это уравнение из предыдущего примера. Исходя из его решения, находим ответ $p \in [-1;\ 1)$. (Сделайте это самостоятельно).

Ответ. $p \in [-1;\ 1)$.

§4. Иррациональные уравнения

Пример 19. Решить уравнение $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$.

Решение. 1 способ. Уравнение $\sqrt{A(x)} = B(x)$, как известно из курса алгебры, равносильно системе $\begin{cases} A(x) = B^2(x), \\ B(x) \geq 0, \end{cases}$ поэтому из корней, которые мы получаем после возведения в квадрат, необходимо отобрать те, для которых $\underline{\sin x \geq 0}$. Имеем

$1 - \cos x = \sin^2 x$, т.е.

$\cos^2 x - \cos x = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = 2\pi n. \end{array}\right.$$

Произведем отбор корней. Отметив полученные корни на тригонометрическом круге, увидим, что неравенству $\sin x \geq 0$ удовлетворяют решения $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2\pi n.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2\pi n.$

2 способ. Воспользуемся формулой $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$. Учитывая то, что, $\sqrt{b^2} = |b|$, получим $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\,|\sin \dfrac{x}{2}|$.Таким образом, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{2}\,|\sin \dfrac{x}{2}| = \sin x$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому $\sin x \geq 0$.

$$\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right| = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

При $\sin\frac{x}{2} \ge 0$ уравнение равносильно $\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0,\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$, при $\sin\frac{x}{2} < 0$ равносильно $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Проведя отбор корней так же, как и в первом способе решения, получаем $\frac{x}{2} = \pi n, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, что дает тот же ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2\pi n.$

§5. Системы тригонометрических уравнений

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением нескольких типов систем тригонометрических уравнений с двумя переменными x и y, опишем возможные способы их решения и разберем на примерах наиболее интересные из них.

5.1. Простейшие и сводящиеся к простейшим системы

Пример 20. Решить систему:

$$\begin{cases}\sin(3x+y) = 2\cos x\cos y,\\ x+y = \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Решение. После подстановки $y = \frac{\pi}{2} - x$ в первое уравнение получаем:

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\cos 2x=\sin 2x,$$

$$tg 2x=1,$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,$$

$$y=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{2}n.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}\right).$

Пример 21. Решить систему:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=1+\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\cos y.\end{cases}$$

Решение. Почленно возводя уравнения системы в квадрат и складывая, получаем уравнение – следствие системы:

$$2=1+2\sin y+1,$$

$$\sin y=0, y=\pi n.$$

Заметим, что преобразование было неравносильное, поэтому подставляем полученные значения y <u>в оба уравнения исходной системы</u> (при этом удобно разбить пример на два случая):

1. Если n – чётное, $n = 2k,$ то $\cos y=1$ и

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2\pi l, y=2\pi k.$$

2. Если же n – нечётное, $n = 2k + 1,$ то $\cos y=-1$ и

$$\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l,\ y = \pi + 2\pi k.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi l, 2\pi k\right), \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi l, \pi + 2\pi k\right).$

5.2. Сведение тригонометрической системы к алгебраической

Пример 22. Решить систему: $\begin{cases} \cos x - \sin y = 1, \\ \cos 2x + \cos 2y = 1. \end{cases}$

Решение. Заметив, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, делаем замену $u = \cos x, \upsilon = \sin y$ и получаем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} u - \upsilon = 1, \\ u^2 - \upsilon^2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \upsilon = 1, \\ (u - \upsilon)(u + \upsilon) = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \upsilon + 1, \\ 2\upsilon + 1 = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{3}{4}, \\ \upsilon = -\dfrac{1}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi n, \\ y = (-1)^{m+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi m. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pm \arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi n, y = (-1)^{m+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi m.$

5.3. Разложение одного из уравнений системы на множители

Пример 23. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \cos 2y = \left(\sin y - \dfrac{1}{2}\right)(1 + 2\sin 2x), \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 6\operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем левую часть первого уравнения:

$$\frac{1}{2}-\cos 2y=\frac{1}{2}-(1-2\sin^2 y)=\frac{1}{2}(4\sin^2 y-1)=\frac{1}{2}(2\sin y-1)(2\sin y+1).$$

Отсюда видно, что первое уравнение системы допускает разложение на множители:

$$(2\sin y-1)(\sin y-\sin 2x)=0.$$

Таким образом, система распадается на две системы:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}2\sin y-1=0,\\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y,\end{cases} \quad \text{и} \quad (\mathrm{II})\begin{cases}\sin y-\sin 2x=0,\\ \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=6\mathrm{tg}^2 y.\end{cases}$$

Для (I) имеем:

$$\sin y=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 y=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{1}{3}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=2.$$

Для (II) имеем: $\sin y=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{tg}^2 y=\dfrac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}.$

Кроме того,

$$tg^2 x+ctg^2 x=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{4-2\sin^2 2x}{\sin^2 2x}.$$

Не составляет труда решить все полученные уравнения в системах (I) и (II) (сделайте это самостоятельно).

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ \ y=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k;$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{8}+\pi m,\ \ y=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;$$

$$x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{8}+\pi m,\ \ y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

5.4. Решение системы тригонометрических уравнений методом подстановки

Пример 24. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 10 - 34\sin^2 x = 21\sin x\cos 2y, \\ \cos x = \cos y\sqrt{3\sin x}. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения видим, что $\sin x \neq 0$. Кроме того, из второго уравнения следует, что $\cos x$ и $\cos y$ имеют одинаковые знаки. Выразив из второго уравнения $\cos y$, подставим в первое:

$$\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x}},$$

$$10 - 34\sin^2 x = 21\sin x\left(2\frac{\cos^2 x}{3\sin x} - 1\right),$$

$$20\sin^2 x - 21\sin x + 4 = 0.$$

Сделаем подстановку $t = \sin x$, прийдем к квадратному уравнению $20t^2 - 21t + 4 = 0$, откуда $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{4}{5}$.

Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{4}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin x = \frac{4}{5}, \\ \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{5}}\cos y. \end{cases}$$

Для первой системы из $\sin x = \frac{1}{4}$ находим $\cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, что невозможно. Для второй системы из $\sin x = \frac{4}{5}$ находим $\cos x = \pm\frac{3}{5}$ и $\cos y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Итак, $x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + \pi n,\ \ y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi m.$

Отметим, что осталось отобрать пары ($x;y$) так, чтобы значения $\cos x$ и $\cos y$ имели одинаковые знаки.

Значит, при $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, а при $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$, $y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m;$

$$x = -\arcsin\frac{4}{5} + (2k+1)\pi,\ \ y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + (2m+1)\pi.$$

п.6.1. Простейшие тригонометрические неравенства

При решении тригонометрических неравенств используются свойства тригонометрических функций, в первую очередь, свойства монотонности и периодичности.

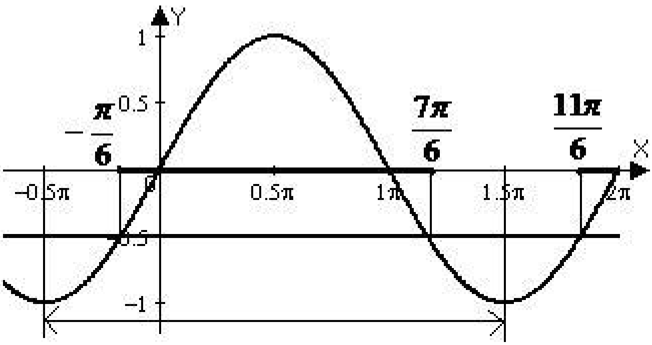
Функции синус и косинус имеют период 2π, поэтому неравенства относительно синуса и косинуса достаточно решить на каком-либо отрезке длины 2π (не обязательно начинающемся из начала координат, отрезок выбирается из удобства – так, чтобы решением неравенства являлся 1 промежуток, а не объединение нескольких). Затем следует продлить полученное решение на бесконечность, прибавив числа вида $2\pi n$.

В случае неравенств относительно функций тангенс и котангенс, решение следует продлевать, соответственно, с периодом π.

Пример 25. Решить неравенство: $\sin x > -\frac{1}{2}.$

Решение. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке

$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π. На этом отрезке график имеет два пересечения с прямой $y=-\frac{1}{2}$: в точках $x=-\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{7\pi}{6}$, а между указанными точками график функции расположен выше прямой $y=-\frac{1}{2}$.



Следовательно, решением неравенства на этом отрезке являются те значения x, для которых значения функции лежат выше прямой $x=-\frac{1}{2}$.

Т.к. функция $y=\sin x$ непрерывна, то решением неравенства $\sin x>-\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ является интервал $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$. Учитывая периодичность, получаем $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Ответ. $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Пример 26. Решить неравенство: $\cos^2 2x+2\sin x\cos^2 x>1$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$\cos^2 2x + 2\sin x\cos^2 x > 1,$

$-\sin^2 2x + 2\sin x\cos^2 x > 0,$

$4\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin x\cos^2 x < 0,$

$\sin x\cos^2 x(2\sin x - 1) < 0,$

$\sin x(2\sin x - 1) < 0.$

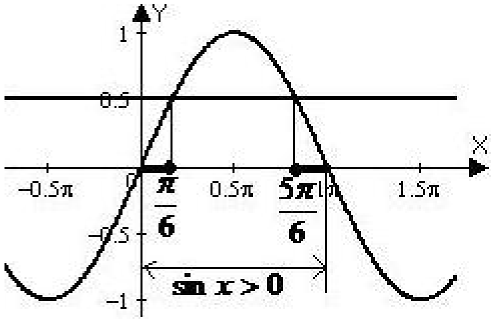
Заменив $t = \sin x, |t| \le 1$, получим:

$$t(2t-1) < 0$$

Отсюда

$$0 < t < \frac{1}{2}$$,т.е.

$$0 < \sin x < \frac{1}{2}.$$



Решаем неравенство на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]: 0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < x < \pi$

,

а, учитывая периодичность, получаем

$$x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right).$$

Ответ. $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$.

При решении более сложных неравенств необходимо с помощью тех же преобразований, что применялись при решении уравнений (разложение на множители, замена переменной и т.д.), свести неравенство к простейшему или совокупности простейших и таким образом решить его.

Заметим также, что в некоторых случаях удобнее вместо графика функции рассматривать тригонометрическую окружность.

Контрольные вопросы

1(3). Чему равно значение выражения $\cos^6 2x + \sin^6 2x$,если известно, что $\cos 4x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$?

2(3). Имеет ли решения уравнение $4\sin\dfrac{x}{2} + 5\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{8}\sqrt{123}$? (метод введения дополнительного угла).

3(4). Используя метод введения дополнительного угла, не вычисляя производной, найти максимум и минимум функции *f(x):*

$$f(x) = \sqrt{17}\cos^2(x + \frac{\pi}{14}) + \sqrt{7}\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) + 17.$$

4(3). Имеет ли уравнение $\sin 9x \sin 4x = -1$ решения? (см.пример 16).

5(2). Показать, что уравнение $8\cos^8 8x - 8\sin 8x + 9 = 0$ не имеет решений (метод оценки).

6(4). Решить уравнение $(\sin 3x + \cos 3x)^4 + 3\cos\left(x - \dfrac{3}{4}\pi\right) = 7$ (метод введения дополнительного угла и метод оценки).

7(4). Решить уравнение $20\cos^3 x - 15\cos x = 3\cos 3x$ (формула косинуса тройного угла).

8(4). Решить уравнение $\sin^2 3x + 2\sin 3x \sin^4\dfrac{x}{3} + \sin^2\dfrac{x}{3} = 0$ (рассмотреть как квадратное относительно $\sin 3x$).

9(2). Решить уравнение методом замены переменной

$\dfrac{\cos 2x}{1 - 2\sin 2x} = \sin x + \cos x$ (см. пункт 3.2).

10(4). Решить уравнение $tgx + tg3x - ctg2x = 0.$

11*(4). Какие значения может принимать параметр *a,* определяемый уравнением $\sin^{14} x + \cos^{14} x = a^6$? (см.пример 15 и рассмотреть производную функции $f(x) = \sin^{14} x + \cos^{14} x$).

12*(4). При каких значениях параметра *a* все решения неравенства

$\sin(x+a) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ находятся в пределах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$?

Задачи

Решить уравнения

1(5). Решить уравнение $\cos x + \cos 4x + \cos 7x = 0$.

2(5). Решить уравнение $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$

3(4). Решить уравнение $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

4(5).Решить уравнение $2 - tgx = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$.

5(4).Решить уравнение $\sin x = -\sqrt{6 - \sin x - 7\cos^2 x}$.

6*(5) Решить уравнение $2\sin 3x - 2\cos 3x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

7(4).Решить уравнение $\sin x = \sqrt{1 + a\cos x}$.

8(5). Решить неравенство $\sqrt{2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} < 1$.

9(5). Решить уравнение $|\cos^3 x| + 13\sin^3 x - \sin x = 0$.

10(5)*.Решить неравенство $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$.

11(5)*. Решить уравнение

$$(5\sin x + 12\cos x)(100 + 48\cos x - 13\cos 2x) = 1757.$$

12(5)*. Найти все значения параметра *a,* при которых уравнение

$\sqrt{a}\cos x - \sqrt{2} = 2\sin x + \sqrt{2-a}$ имеет хотя бы 1 решение.

Решить системы уравнений

13(5). $\begin{cases} tgx + tgy = 2, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

14(5)*. $\begin{cases} \sqrt{1+\sin x \sin y} = \cos x, \\ \sin x \cdot ctgy = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$