

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральная заочная физико-техническая школа  
при Московском физико – техническом институте  
(государственном университете)**

**ФИЗИКА**

**Основные законы механики**

Задание №1 для 11-х классов

(2010-2011 учебный год)



г. Долгопрудный, 2010

Физика: задание №1 для 11-х классов (2010-2011 учебный год). - М.: МФТИ, 2010, 32с.

**Дата отправления заданий по физике и математике – 28 сентября 2010г.**

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «\*» (звездочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

**Составитель:**

**Чугунов Алексей Юрьевич**

Подписано 08.06.10. Формат 60х90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0

Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1200. Заказ №1-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа  
при Московском физико-техническом институте  
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**  
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**  
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

*e-mail: [zftsh@mail.mipt.ru](mailto:zftsh@mail.mipt.ru)*

**Наш сайт: [www.school.mipt.ru](http://www.school.mipt.ru)**

© ФЗФТШ при МФТИ, 2010

В предлагаемом Задании основное внимание будет уделено примерам решения задач по темам различных разделов механики. Для успешной работы над ним Вам будет полезно использование соответствующего материала школьных учебников по физике.

## §1. Кинематика

В кинематике устанавливаются математические соотношения между различными характеристиками механического движения, такими как перемещение, пройденный путь, скорость, ускорение, время движения. При этом механическое движение рассматривается без выяснения причин, его вызывающих.

Пространственное положение тела (материальной точки) определяется с помощью её *радиус-вектора*  $\vec{r}$  или, что равносильно, совокупности трех чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$ , представляющих собой проекции радиус-вектора на соответствующие оси декартовой системы координат. Движение тела определено, если известна зависимость радиус-вектора от времени  $\vec{r}(t)$ , или известны скалярные функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ .

Для равномерного прямолинейного движения, т.е. для движения с постоянной скоростью  $\vec{v} = const$ , функция  $\vec{r}(t)$  имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \quad (1)$$

для равнопеременного движения с постоянным ускорением  $\vec{a} = const$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (2)$$

В этих формулах  $\vec{r}_0$  характеризует начальное положение тела и представляет собой его радиус-вектор в начальный момент времени  $t = 0$ , соответственно  $\vec{v}_0$  – начальная скорость тела при  $t = 0$ .

Зависимость *мгновенной скорости*  $\vec{v}$  (или просто *скорости*  $\vec{v}$ ) тела от времени  $t$  при равнопеременном движении получается путём дифференцирования (2) по времени и имеет вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (3)$$

Часто в процессе решения задач для удобства приходится переходить от одной системы отсчёта (условно назовем её неподвижной) к другой системе отсчёта, движущейся определённым образом относительно первой. В этих случаях необходимо знать так называемые формулы преобразования радиусов-векторов, скоростей и ускорений тел в различных системах отсчёта. Так *если одна система отсчёта движется поступательно относительно другой, условно неподвижной, то справедливы следующие соотношения* для указанных величин

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}',$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  – радиусы-векторы материальной точки соответственно в неподвижной и движущейся системах отсчёта,  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор начала координат (точки  $O'$ ) движущейся системы отсчёта в неподвижной системе отсчёта. Аналогичные обозначения использованы в приведённых формулах для скоростей и ускорений материальной точки.

Из последней формулы вытекает важное следствие, а именно, при  $\vec{a}_0 = 0$ , когда скорость поступательно движущейся системы отсчёта постоянна, ускорения материальной точки в неподвижной и движущейся системах отсчёта одинаковы.

При решении задач бывает удобно записывать векторные кинематические уравнения в проекциях на оси координат. В случаях, когда траектория тела лежит в одной плоскости, можно ограничиться двумя координатными осями  $Ox$  и  $Oy$ , так чтобы исходные векторные уравнения сводились к двум скалярным. Для этого нужно всего лишь совместить плоскость  $xOy$  с плоскостью траектории тела. Так, например, векторные уравнения (2) и (3) будут соответственно эквивалентны системам скалярных уравнений (4) и (5):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $x(t), y(t); x_0, y_0; v_{0x}, v_{0y}; v_x, v_y; a_x, a_y$  – проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  векторов  $\vec{r}(t); \vec{r}_0; \vec{v}_0; \vec{v}$  и  $\vec{a}$  соответственно.

При равномерном движении тела по окружности вектор скорости изменяется только по направлению, оставаясь неизменным по модулю и направленным по касательной к окружности. При этом вектор ускорения направлен к центру окружности перпендикулярно вектору скорости, т. е. по нормали  $n$  к траектории (рис. 1). Такое ускорение часто называют *центростремительным* или *нормальным*, его модуль равен

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (6)$$

где  $R$  – радиус окружности. Эта же формула справедлива и при движении тела с постоянной по модулю скоростью  $v$  по произвольной криволинейной траектории. В этом случае  $R$  есть радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. Вектор ускорения  $\vec{a}_n$  направлен к цен-

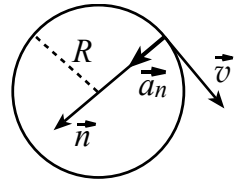


Рис. 1

тру кривизны перпендикулярно вектору скорости и характеризует изменение скорости по направлению.

Если же скорость изменяется не только по направлению, но и по модулю, то у вектора ускорения  $\vec{a}$  кроме нормальной составляющей (6), будет ещё так называемая тангенциальная составляющая  $\vec{a}_\tau$ , направленная по касательной  $\tau$  к траектории в данной точке (рис. 2) в сторону вектора скорости или против него в зависимости от того, увеличивается или уменьшается модуль скорости тела. Модуль полного ускорения  $\vec{a}$  по теореме Пифагора будет равен  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ .

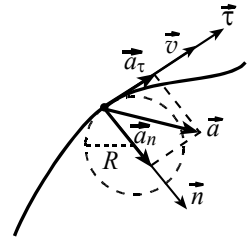


Рис. 2

Решение кинематических задач сводится к использованию указанных выше формул и уравнений в конкретных сформулированных условиях.

**ЗАДАЧА 1.** Необходимо переправиться через реку шириной  $H$ . Под каким углом  $\alpha$  к течению должна плыть лодка, чтобы переправиться на противоположный берег за минимальное время? Где окажется лодка, переплыв реку? Какой путь  $S$  она пройдёт, если скорость течения реки постоянная и равна  $\vec{v}_1$ , а скорость лодки относительно воды постоянна и равна  $\vec{v}_2$ ?

**РЕШЕНИЕ.** Поместим начало  $O$  неподвижной системы отсчёта в то место, где лодка отчаливает от берега. Оси координат направим так, как показано на рис. 3. При таком выборе системы отсчёта начальные координаты лодки равны нулю:

$$x_0 = 0, y_0 = 0.$$

Скорость лодки  $\vec{v}$  в выбранной системе отсчёта равна векторной сумме скорости течения  $\vec{v}_1$  и скорости лодки относительно воды  $\vec{v}_2$ , то есть  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Предположим, что вектор  $\vec{v}_2$  составляет с берегом угол  $\alpha$ .

Поскольку лодка движется прямолинейно и равномерно, то, записав уравнение (1) в проекциях на оси координат, получим:

$$\begin{cases} x = (v_1 - v_2 \cos \alpha) \cdot t, \\ y = (v_2 \sin \alpha) \cdot t. \end{cases}$$

Время  $t_n$ , необходимое для переправы через

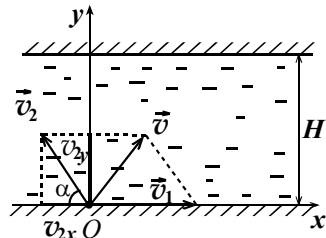


Рис. 3

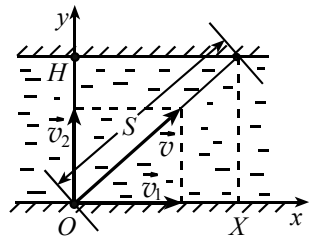


Рис. 4

реку, находим из последнего уравнения при условии  $y = H$ , а именно

$t_n = \frac{H}{v_2 \sin \alpha}$ . Значение  $t_n$  будет минимальным, если  $\sin \alpha$  максима-

лен, т.е. при  $\alpha = \pi/2$ . Отсюда  $t_{\min} = \frac{H}{v_2}$ . Этот случай показан

на рис. 4. При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  уравнение для  $x$  принимает вид:  $x = v_1 t$ . Поэто-

му, когда лодка окажется на другом берегу, смещение  $X$  вдоль оси  $Ox$

будет равно  $X = v_1 t_{\min} = \frac{v_1}{v_2} H$ .

Длину  $S$  пройденного лодкой пути найдём по теореме Пифагора:

$$S = \sqrt{X^2 + H^2} = \frac{H}{v_2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

**ЗАДАЧА 2.** Тело бросают с поверхности земли, сообщив ему начальную скорость  $\vec{v}_0$ , направленную под углом  $\alpha$  к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите нормальную и тангенциальную составляющие ускорения тела на высоте  $h$ , когда тело ещё не достигло наивысшей точки траектории. Найдите, также, время  $t_n$  подъёма тела на высоту  $h$  и горизонтальную проекцию  $l$  перемещения тела в этот момент времени.

**РЕШЕНИЕ.** Направим оси декартовой прямоугольной системы координат так, как показано на рис. 5. Начало отсчёта  $O$  поместим в точку бросания. Запишем начальные условия движения тела:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . При отсутствии сопротивления воздуха тело движется с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения  $\vec{g}$ , направленным вертикально вниз. Проекция ускорения тела на оси координат, поэтому, равны:

$a_x = 0$ ,  $a_y = -g$ . С учётом сказанного, кинематические уравнения равнопеременного движения (4) и (5) в нашем случае принимают вид

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t, \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}, \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha, \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть при  $t = t_n$  тело достигло высоты  $h$ , тогда  $y = h$ ,  $x = l$ . В этом случае уравнения системы (7) дают:

$$l = (v_0 \cos \alpha) t_n, \quad h = (v_0 \sin \alpha) t_n - \frac{gt_n^2}{2}.$$

Из последнего уравнения находим

$$t_n = \frac{1}{g} \left( v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh} \right).$$

Второе значение  $t_n$  со знаком «+» перед квадратным корнем соответствует случаю, когда тело «перевалило» за наивысшую точку траектории и вновь оказалось на высоте  $h$  над землей. Этот случай по условию задачи нас не интересует.

В момент времени  $t = t_n$  проекция  $l$  перемещения тела равна

$$l = (v_0 \cos \alpha) t_n = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \cdot \left( v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh} \right).$$

Модули нормальной и тангенциальной составляющих ускорения тела будут соответственно равны

$$a_n = g \cos \beta, \quad a_\tau = -g \sin \beta,$$

где  $\beta$  – угол, который составляет с горизонтом (осью  $Ox$ ) вектор  $\vec{v}$  скорости тела в момент времени  $t = t_n$  (рис. 5). Угол  $\beta$  легко определить, записав уравнения системы (8) при  $t = t_n$ , а именно

$$v \cos \beta = v_0 \cos \alpha,$$

$$v \sin \beta = v_0 \sin \alpha - gt_n.$$

Действительно,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

и  $\cos \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{v}$ . Отсюда  $\beta = \arccos \left( \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}} \right)$ .

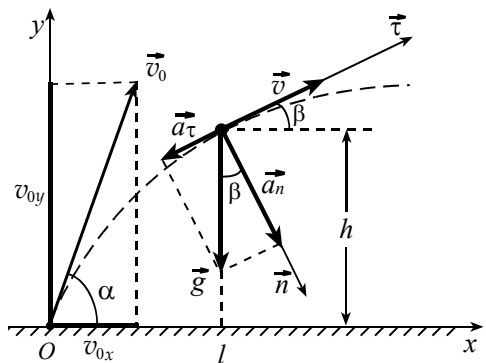


Рис. 5

## § 2. Динамика

В динамике механическое движение изучается в связи с причинами, вызывающими тот или иной его характер. В инерциальных системах отсчёта этими причинами являются различные взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами, что выражается в наличии сил, действующих на тело.

В основе динамики материальной точки лежат законы Ньютона.

**1-й закон:** *тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не выведут его из этого состояния.*

Система отсчёта, по отношению к которой тело, свободное от внешних воздействий, покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется **инерциальной системой отсчёта**.

**2-й закон:** *в инерциальных системах отсчёта ускорение  $\vec{a}$  тела прямо пропорционально равнодействующей  $\vec{F}$  всех сил, действующих на тело со стороны других тел, обратно пропорционально массе  $m$  тела и направлено в сторону  $\vec{F}$ :*

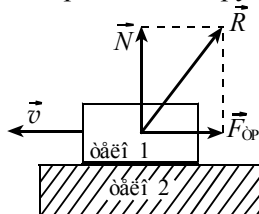
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

**3-й закон:** *тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю, противоположными по направлению и приложенными соответственно к взаимодействующим телам.*

В инерциальных системах отсчёта все силы обусловлены только взаимодействием тел, эти силы возникают парами и к ним применим 3-й закон Ньютона.

Формулу, выражающую 2-й закон Ньютона, можно записать более удобно:  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Однако такую запись не следует трактовать как равенство двух сил  $\vec{F}$  и  $m\vec{a}$ . Это есть выражение равнодействующей силы  $\vec{F}$  через массу тела и вызванное этой силой ускорение. В динамике взаимодействия тел считаются заданными, поэтому выражения для сил, входящих в законы динамики, должны быть взяты из других разделов физики, где изучается их природа.

Во многих задачах приходится рассматривать трение тел друг о друга. При наличии трения силу  $\vec{R}$ , с которой одно тело действует на другое, удобно рассматривать как векторную сумму двух сил (рис. 6): силы  $\vec{N}$ , направленной перпендикулярно к поверхности контакта (это – *сила нормального давления* или *сила нормальной реакции опоры*), и силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направленной по касательной к поверхности контакта.



**Рис. 6**

Удобство заключается в том, что при скольжении тел относительно друг друга модули этих составляющих связаны между собой законом Кулона-Амонтона, установленным экспериментально:



$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (9)$$

Коэффициент трения скольжения  $\mu$  зависит от рода соприкасающихся поверхностей. Обычно пренебрегают слабой зависимостью силы трения от площади контакта и от величины относительной скорости  $v$  тел.

Для трения покоя закон (9) не применим, т.к. при постоянной  $N$  модуль силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, обычно несколько превышающего силу трения скольжения для этих поверхностей (так называемое явление *застоя*). Но для простоты максимальное значение силы трения покоя также принимают равным  $\mu N$ .

Если тело может катиться по той или иной поверхности, то из-за деформации материала этой поверхности перед катящимся телом возникает *сила трения качения*, которая обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. Обычно сила трения качения гораздо меньше силы трения скольжения и ею, поэтому, пренебрегают.

При движении твёрдого тела в жидкости или газе возникает *сила сопротивления*, зависящая от скорости движения тела относительно среды (жидкости, газа). Эта сила может быть прямо пропорциональна как самой указанной скорости, так и квадрату скорости. При этом «сопротивление покоя», аналогичное трению покоя, отсутствует.

При решении задач следует также иметь в виду, что основное уравнение динамики, выражающее 2-й закон Ньютона, является векторным уравнением. Однако часто бывает так, что силы, действующие на то или иное тело, лежат в одной плоскости. Тогда можно выбрать систему отсчёта, оси  $Ox$  и  $Oy$  которой лежали бы в плоскости действия сил, и указанное векторное уравнение сводилось бы к двум скалярным (в проекциях на выбранные оси).

**ЗАДАЧА 3.** Два груза массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Определите ускорения грузов в процессе их движения. Трением в блоке пренебречь.

**РЕШЕНИЕ.** Для описания движения системы здесь будет достаточно одной координатной оси  $Oy$ , которую направим вертикально вниз. Пусть груз  $m_1$  движется вниз с ускорением  $\vec{a}_1$ , а груз  $m_2$  – вверх с ускорением  $\vec{a}_2$  (рис. 7). На каждый из грузов действуют сила тяжести и сила натяжения нити, изображённые на рисунке. Запишем уравнение 2-го закона Ньютона в проекциях на ось  $Oy$  для каждого груза:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1;$$

$$-m_2 a_2 = m_2 g - T_2.$$

Поскольку нить и блок невесомы, то  $T_1 = T_2$ . Из нерастяжимости нити следует равенство модулей ускорений грузов:  $a_1 = a_2$ . Решая полученные уравнения с учётом двух последних равенств, найдём:

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Если  $m_1 < m_2$ , то направления ускорений грузов будут противоположными тем, которые мы выбрали изначально на рис. 7.

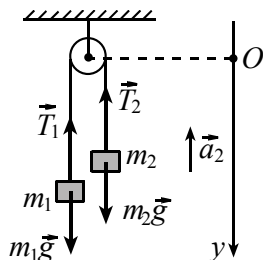


Рис. 7

**\* ЗАДАЧА 4.** Доску с находящимся на ней бруском удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 8а). Расстояние от бруска до края доски  $S = 49$  см. Доску и брусок одновременно отпускают, и доска начинает скользить по наклонной плоскости, а брусок – по доске. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской  $\mu_1 = 0,3$ , а между доской и наклонной плоскостью  $\mu_2 = 0,4$ . Масса доски в три раза больше массы бруска. 1) Определить ускорение бруска относительно наклонной плоскости при скольжении бруска по доске. 2) Через какое время брусок достигнет края доски? (МФТИ, 2001г.)

**РЕШЕНИЕ.** Выберем систему координат и изобразим силы, действующие на брусок и доску, на рис. 8б. Заметим, что сила нормальной реакции  $\vec{N}_1$  и сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр1}}$  действуют на брусок массой  $m$  и обусловлены его взаимодействием с доской массой  $3m$ . По третьему закону Ньютона такие же по модулю, но противоположно направленные им силы  $\vec{N}'_1$  и  $\vec{F}'_{\text{тр1}}$  действуют со стороны бруска на доску. Точки их приложения к доске на рис. 8б пространственно разнесены по соображениям удобства восприятия чертежа. Смысл остальных сил ясен из их обозначений.

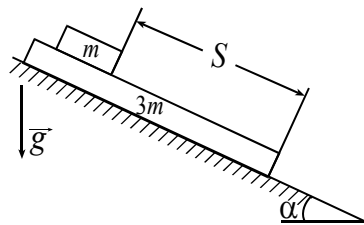


Рис. 8а

Пусть  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  – ускорения бруска и доски соответственно относительно

наклонной плоскости. Тогда по второму закону Ньютона в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  можно записать для бруска:

$$\begin{cases} ma_1 = mgsin\alpha - F_{тр1}, \\ 0 = N_1 - mgcos\alpha, \end{cases}$$

для доски:

$$\begin{cases} 3ma_2 = 3mgsin\alpha + F'_{тр1} - F_{тр2}, \\ 0 = N_2 - N'_1 - 3mgcos\alpha. \end{cases}$$

К этим уравнениям необходимо добавить выражения для сил трения:

$$F_{тр1} = F'_{тр1} = \mu_1 N_1, \quad F_{тр2} = \mu_2 N_2.$$

Решая совместно записанные уравнения, находим

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \approx 7 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = \frac{1}{3} g(3\sin\alpha + (\mu_1 - 4\mu_2) \cos\alpha) \approx 6,4 \text{ м/с}^2.$$

Видим, что движется по наклонной плоскости с ускорением, меньшим, чем у бруска. Заметим, что движение доски не влияет на ускорение  $a_1$ . Это связано с тем, что и при движущейся, и при закреплённой доске сила трения  $F_{\text{дд1}}$  между бруском и доской одна и та же.

Пусть брусок достиг края доски через время  $t$  ã момента начала движения. За это время брусок и доска пройдут относительно наклонной плоскости пути

$S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$  и  $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$  соответственно (это – кинематические соотношения). Их разность  $S_1 - S_2$  будет равна пути, пройденному бруском по доске, то есть – начальному расстоянию  $S$  от бруска до края доски.

Тогда  $S = S_1 - S_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot t^2$ , откуда  $t = \sqrt{\frac{2S}{a_1 - a_2}}$ . С учётом

выражений для  $a_1$  и  $a_2$  получим  $t = \sqrt{\frac{3S}{2(\mu_2 - \mu_1)gcos\alpha}} \approx 1,2 \text{ с}$ .

**Ответ:** 1)  $a_1 \approx 7 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $t \approx 1,2 \text{ с}$ .

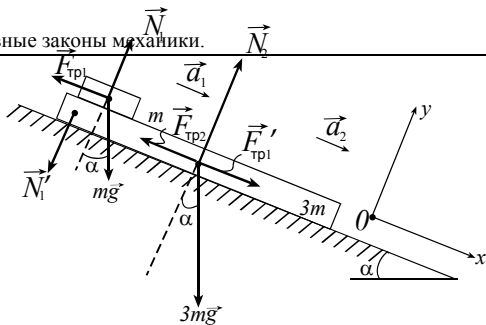


Рис. 86

**ЗАДАЧА 5.** С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью  $u = 9,8 \text{ м/с}$  под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонту. Модуль вертикальной составляющей скорости в точке бросания был на 20% больше, чем в точке падения. Найти время полёта мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча со стороны воздуха прямо пропорциональна его скорости.

(МФТИ, 1989 г.)

**РЕШЕНИЕ.** Сила сопротивления воздуха направлена против скорости  $\vec{v}$  мяча и равна  $-k\vec{v}$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Разобьем время  $t$  полёта мяча на сколь угодно малые интервалы времени  $\Delta t_i$ . Для произвольно взятого интервала времени  $\Delta t_i$  обозначим средний вектор скорости мяча на этом интервале через  $\vec{v}_i$  (рис. 9) и запишем уравнение второго закона Ньютона

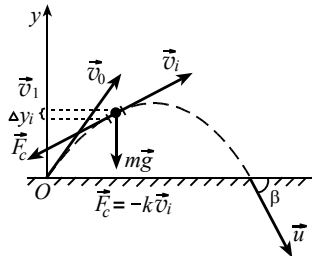


Рис. 9

для движения мяча:  $m\vec{g} - k\vec{v}_i = m \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t_i}$ ,

где  $m$  – масса мяча,  $\Delta \vec{v}_i$  – изменение скорости мяча за время  $\Delta t_i$ . Здесь мы воспользовались определением ускорения  $\vec{a}_i = \Delta \vec{v}_i / \Delta t_i$ .

Спроецируем написанное уравнение на ось  $Oy$ , направленную вертикально вверх и умножим обе части уравнения на  $\Delta t_i$ .

Тогда  $-mg \cdot \Delta t_i - kv_{iy} \cdot \Delta t_i = m \cdot \Delta v_{iy}$ ,

где  $v_{iy}$  и  $\Delta v_{iy}$  – проекции на ось  $Oy$  скорости и изменения скорости мяча соответственно. Заметим, что за интервал времени  $\Delta t_i$  изменение вертикальной координаты мяча  $\Delta y_i = v_{iy} \cdot \Delta t_i$ . С учётом этого получаем:  $-mg \cdot \Delta t_i - k \cdot \Delta y_i = m \cdot \Delta v_{iy}$ . Аналогичные уравнения будут справедливы для любого интервала  $\Delta t_i$ . Если сложить эти уравнения для всех интервалов времени  $\Delta t_i$ , получим

$$-mg \cdot t - k \cdot \Delta y = m \cdot \Delta v_y. \quad (*)$$

Здесь  $\Delta y$  и  $\Delta v_y$  – изменение координаты мяча по оси  $Oy$  и изменение

проекции на ось  $Oy$  скорости мяча за всё время полёта  $t$ . В нашей задаче  $\Delta y = 0$  (камень был брошен с земли и упал на землю, т.е. конечная и начальная координаты мяча одинаковы), а  $\Delta v_y = u_y - v_{0y} = -u \sin \beta - 1,2u \sin \beta = -2,2u \sin \beta$ . С учётом этого из уравнения (\*) находим

$$t = 2,2 \frac{u}{g} \sin \beta \approx 1,1c. *$$

**ЗАДАЧА 6.** Санки скользят по ледяной горке, имеющей форму дуги окружности (рис. 10а). В некоторой точке  $A$ , определяемой углом  $\alpha$ , сила нормального давления санок на горку численно равна силе тяжести санок. Определить ускорение санок в точке  $A$ . Трением и размерами санок пренебречь.

**РЕШЕНИЕ.** По условию задачи сила  $\vec{N}'$ , с которой санки давят на горку в точке  $A$  численно равна силе тяжести, действующей на санки. По третьему закону Ньютона горка действует на санки с такой же по величине силой. В нашем случае это – сила нормальной реакции опоры  $\vec{N}$  (рис. 10б). Итак,  $N = N' = mg$ .

Полное ускорение санок  $\vec{a}$  в т.  $A$  складывается из тангенциальной  $\vec{a}_\tau$  и нормальной  $\vec{a}_n$  составляющих. С учётом этого запишем уравнение второго закона Ньютона для движения санок в проекциях на взаимно перпендикулярные направления  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$ :

$$ma_\tau = mg \sin \alpha; \quad ma_n = N - mg \cos \alpha.$$

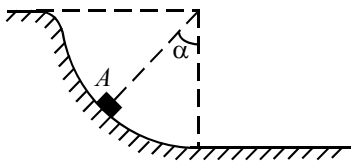


Рис.10а

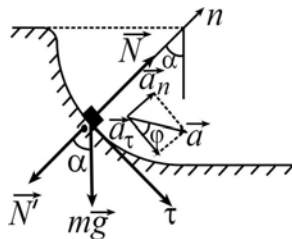


Рис. 10б

Отсюда находим  $a_\tau = g \sin \alpha$ ,  $a_n = g(1 - \cos \alpha)$ . Здесь мы учли, что  $N = mg$ . Тогда модуль ускорения санок равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = g \sqrt{\sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2} = g \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}.$$

Направление вектора  $\vec{a}$  определим с помощью угла  $\varphi$ , который век-

тор  $\vec{a}$  составляет с направлением  $\vec{\tau} : \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

### §3. Статика

В *статике* изучается равновесие тел. Наряду с моделью материальной точки, здесь в большинстве случаев используется *модель абсолютно твёрдого тела*, т.е. тела, форма и размеры которого считаются неизменными.

Будем считать, что тело находится в равновесии в некоторой системе отсчёта, если в этой системе отсчёта оно покоится.

Условием равновесия материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчёта является равенство нулю суммы всех сил, действующих на материальную точку:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \quad (11)$$

Условием равновесия абсолютно твёрдого тела в некоторой инерциальной системе отсчёта является равенство нулю суммы всех внешних сил  $\vec{F}_i$ , действующих на тело, и равенство нулю суммы моментов  $M_i$  всех внешних сил относительно любой оси в пространстве:

$$\sum_i \vec{F} = 0; \sum_i M_i = 0. \quad (12)$$

Приведённые выше векторные уравнения можно записывать в проекциях на любую координатную ось. При этом каждое из полученных равенств будет означать, что при равновесии тела сумма проекций на соответствующую координатную ось всех сил, входящих в векторное уравнение, равна нулю.

В случае, когда вектор силы, действующей на твёрдое тело, лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, *момент этой силы равен произведению модуля силы на её плечо*, т. е. расстояние от линии действия силы до оси вращения. Если же вектор силы не перпендикулярен оси вращения, то *момент такой силы равен моменту той её составляющей, которая перпендикулярна оси вращения.*

Выбор оси вращения для написания уравнения моментов в системе (12) осуществляется произвольно, исходя из соображений удобства решения конкретной задачи. Уравнение моментов будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты. При составлении уравнения моментов нужно помнить правило знаков: моментам, вызыва-

вающим вращение тела по часовой стрелке относительно выбранной оси приписывают знак «+», а моментам, вызывающим вращение против часовой стрелки – знак «-».

Следует, однако, иметь в виду, что сформулированные условия равновесия являются необходимыми, но не достаточными условиями. Действительно, при выполнении этих условий и материальная точка и твёрдое тело могут не только покоиться (находиться в равновесии). Так, материальная точка при выполнении условия равновесия может двигаться равномерно и прямолинейно. Аналогично, центр масс твёрдого тела может двигаться равномерно и прямолинейно, а само тело может вращаться вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью. Но если известно, что материальная точка или твёрдое тело находятся в равновесии, то отсюда обязательно (необходимо) следует выполнение соответствующих условий равновесия!

В механике важное значение имеют понятия *центра масс* тела и *центра тяжести* тела (подразумевается модель абсолютно твёрдого тела). Если тело массой  $M$  мысленно разбить на множество сколь угодно малых частей с массами  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , каждую из которых можно считать материальной точкой, то пространственное положение  $i$ -й материальной точки с массой  $m_i$  можно

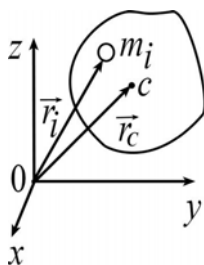


Рис. 11

определить радиус-вектором  $\vec{r}_i$  (рис. 11). При этом очевидно, что

$$\sum_i m_i = M.$$

*Центром масс тела (или системы тел) называется точка C (рис.12), радиус-вектор  $\vec{r}_C$  которой определяется по формуле*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i.$$

Можно показать, что 1) положение центра масс относительно тела не зависит от выбора начала координат  $O$ , 2) центр масс однородного центрально симметричного тела совпадает с его центром симметрии, 3) центр масс однородного осесимметричного тела лежит на оси симметрии тела.

Кроме того, в ряде случаев при решении задач можно мысленно сосредоточить в центре масс всю массу тела и, считая тело материальной точкой, применять законы механики для материальной точки.

*Центром тяжести тела, находящегося в поле тяготения, называ-*

ют точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на все части тела. Эта сила называется силой тяжести, действующей на тело.

В однородном поле тяжести (например, вблизи поверхности Земли) центр тяжести тела совпадает с его центром масс. Заметим, что *центр масс существует независимо от поля тяжести, в то время как о центре тяжести имеет смысл говорить только при наличии такого поля.*

Например, центр масс и центр тяжести гантели, представляющей собой два шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединённые жёстким невесомым стержнем длины  $l$  (рис. 12), совпадают и располагаются в точке  $C$ , отстоящей от шарика  $m_1$  на расстояние

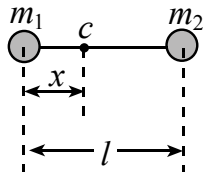


Рис. 12

$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$  (покажите это самостоятельно). В отсутствие поля тя-

жести центр масс гантели остаётся в точке  $C$ , тогда как понятие центра тяжести теряет смысл.

**ЗАДАЧА 7.** Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску массой  $m$ , находящемуся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ , чтобы он не двигался?

**РЕШЕНИЕ.** На брусок (рис. 13) действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормального давления  $\vec{N}$  со стороны наклонной плоскости и сила  $\vec{F}$ , которую надо найти. (Сила трения отсутствует, поскольку поверхность

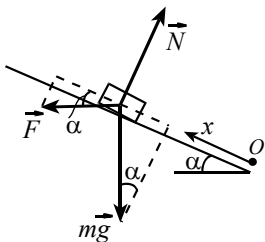


Рис. 13

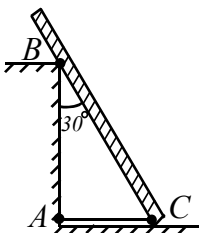


Рис. 14

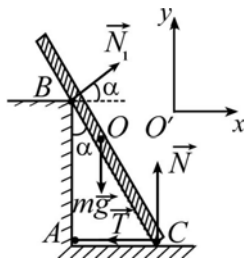


Рис. 15

наклонной плоскости гладкая.) Так как брусок находится в покое, запишем условие (11) равновесия бруска, считая его материальной точкой:  $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = 0$ . В проекциях на ось  $Ox$ , направленную вдоль наклонной плоскости (рис. 14), это уравнение даёт:  $F \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$ . Откуда  $F = mg \operatorname{tg} \alpha$ .

**ЗАДАЧА 8.** Однородная балка (рис. 14) массой  $m$  ( $mg = 1200\text{Н}$ ) и



длиной 2 м опирается о гладкий пол и гладкий выступ  $B$  на высоте 1,5 м над полом. Балка составляет с вертикалью угол  $\alpha = 30^\circ$  и удерживается верёвкой  $AC$ , натянутой у пола. Найдите силу натяжения верёвки и силы реакций пола и выступа.

**РЕШЕНИЕ.** На балку действуют (рис. 15) сила тяжести  $m\vec{g}$  (приложенная к центру тяжести балки – точке  $O$ ), сила натяжения нити  $\vec{T}$  (приложенная к балке в точке  $C$ ), сила  $\vec{N}$  нормальной реакции со стороны пола (приложенная в точке  $C$  и направленная перпендикулярно полу, т. к. поверхность гладкая и трения нет) и сила  $\vec{N}_1$  нормальной реакции со стороны выступа (приложенная в точке  $B$  и направленная перпендикулярно балке по той же причине отсутствия трения). Запишем условия (12) равновесия для балки, предварительно спроецировав указанные силы на оси  $O'x$  и  $O'y$  и выбрав для вычисления моментов этих сил ось, проходящую через точку  $C$  перпендикулярно плоскости рисунка 15:

$$O'x: N_1 \cos \alpha - T = 0, \quad O'y: N_1 \sin \alpha + N - mg = 0,$$

$$\text{Ось } C: N_1 \cdot |BC| - mg \cdot |OC| \cdot \sin \alpha = 0.$$

Моменты сил  $\vec{T}$  и  $\vec{N}$  относительно оси  $C$  оказались нулевыми, поскольку линии действия этих сил проходят через точку  $C$  и, следовательно, их плечи равны нулю. В этих уравнениях  $|BC| = |AB| / \cos \alpha = \sqrt{3}$  и так как центр тяжести однородных симметричных тел расположен в их геометрическом центре или на оси симметрии (в нашем, случае посередине балки – в точке  $O$ ), то  $|OC| = 1$  м.

Решив полученную систему из трёх уравнений, найдём

$$N_1 = mg \cdot \frac{|OC|}{|BC|} \cdot \sin \alpha = 200\sqrt{3}\text{Н}, \quad T = N_1 \cos \alpha = 300\text{Н},$$

$$N = mg \cdot \left( 1 - \frac{|OC|}{|BC|} \sin^2 \alpha \right) \approx 1027\text{Н}.$$

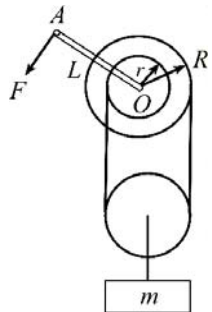


Рис. 16

**\* ЗАДАЧА 9.** Дифференциальный ворот представляет собой два скреплённых соосных цилиндра радиусами  $R = 10$  см и  $r = 8$  см, на которые намотан трос (рис. 16).

Трос перекинут через подвижный блок и его концы закреплены на цилиндрах. При вращении рукоятки  $OA$  длиной  $L = 20$  см вокруг неподвижной гори-

горизонтальной оси цилиндров  $O$  трос наматывается на большой цилиндр и сматывается с меньшего, а груз, подвешенный к подвижному блоку, поднимается. Массами цилиндров, рукоятки, троса, подвижного блока и трением в осях пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

Найдите минимальную силу  $F$ , которую необходимо приложить к рукоятке ворота, чтобы поднимать груз массой  $m = 140 \text{ кг}$ . (МФТИ, 2008г.)

**РЕШЕНИЕ.** Изобразим на рис. 17 силы, действующие на цилиндры и груз, где через  $T$  обозначена сила натяжения троса связывающего подвижный блок с дифференциальным воротом, через  $T_1$  – сила натяжения троса, на котором к подвижному блоку подвешен груз, а через  $mg$  – сила тяжести груза.

Поскольку массой подвижного блока можно пренебречь, то в проекциях на ось  $O_1x$  можно записать

$$2T - T_1 = 0.$$

Для груза, находящегося в равновесии, в проекциях на ту же ось имеем:

$$T_1 - mg = 0.$$

Для моментов сил, действующих на дифференциальный ворот, относительно оси ворота, проходящей через точку  $O$ , справедливо уравнение:

$$TR - Tr - FL = 0.$$

Решая совместно три написанных уравнения, найдём

$$F = \frac{R-r}{2L} mg = 70 \text{ Н.} \quad *$$

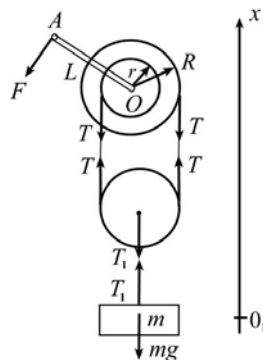


Рис. 17

#### § 4. Импульс. Работа. Энергия

Решение механических задач часто облегчается применением законов изменения и сохранения импульса и энергии тела. Особенно эффективным является использование этих законов в тех случаях, когда действующие силы переменны во времени и непосредственное решение уравнений динамики с помощью методов элементарной математики затруднительно.

Напомним, что *импульсом тела* называется векторная величина  $\vec{p}$ , равная произведению массы  $m$  тела на его скорость  $\vec{v}$ :  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

*Импульсом системы тел*  $\vec{P}$  называют векторную сумму импульсов всех тел, составляющих эту систему. Например, если система состоит из трёх тел с импульсами  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  и  $\vec{p}_3$ , то импульс такой системы тел

равен  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ .

В общем случае импульс тела в процессе движения может изменяться как по величине, так и по направлению. При этом справедлив закон изменения импульса тела: *приращение импульса тела равно произведению равнодействующей силы  $\vec{F}$  на промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого она действует на тело  $\Delta\vec{P} = \vec{F} \cdot \Delta t$* . Произведение  $\vec{F} \cdot \Delta t$  называют *импульсом силы*. Аналогичное соотношение справедливо и для системы тел, только в этом случае под  $\vec{F}$  надо понимать равнодействующую только внешних сил: *приращение  $\Delta\vec{P}$  импульса системы тел равно импульсу равнодействующей  $\vec{F}$  внешних сил, действующих на систему  $\Delta\vec{P} = \vec{F} \cdot \Delta t$* . Внутренние силы взаимодействия между телами, входящими в систему, не могут изменить импульс системы.

Из сказанного следует закон сохранения импульса системы тел (или отдельно взятого тела). *Импульс системы тел (тела) сохраняется (т.е.  $\Delta\vec{P} = 0$ ) при любых взаимодействиях тел системы, если импульс равнодействующей  $\vec{F}$  внешних сил  $\vec{F} \cdot \Delta t$  равен нулю*. Это возможно в каком-либо из трёх случаев:

- 1) если внешние силы на систему (тело) не действуют вообще (система изолированная);
- 2) если равнодействующая  $\vec{F}$  внешних сил, действующих на систему(тело), равна нулю;
- 3) если промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого на систему (тело) действуют внешние силы мал ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), а равнодействующая  $\vec{F}$  ограничена по модулю (не бесконечно большая).

Встречаются ситуации, когда импульс системы тел (тела) в целом не сохраняется, но *сохраняется проекция  $P_x$  импульса на некоторое направление  $Ox$  ( $\Delta P_x = 0$ )*. Это возможно в трёх случаях:

- 1) если внешние силы, действующие на систему (тело), направлены перпендикулярно оси  $Ox$ ;
- 2) если проекция  $F_x$  на ось  $Ox$  равнодействующей  $\vec{F}$  внешних сил равна нулю;
- 3) если промежуток времени  $\Delta t$  мал, а проекция  $F_x$  ограничена

по модулю ( $|F_x| \neq \infty$ ).

Часто при решении задач для определения импульса системы тел бывает удобно воспользоваться понятием *центра масс* рассматриваемой системы. Можно показать, что *импульс  $\vec{P}$  системы тел равен произведению массы  $M$  системы (т. е. суммы масс тел, входящих в систему) на скорость  $\vec{v}_c$  движения её центра масс (точки  $C$ ):  $\vec{P} = M\vec{v}_c$ .*

В связи с этим справедлива *теорема о движении центра масс: центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием силы, равной векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.* Использование сформулированной теоремы позволяет, порой, существенно упростить процесс решения задачи.

Изменение импульса тела (системы) характеризует действие силы в течение конкретного промежутка времени. Для характеристики действия силы на определённом перемещении служит физическая величина, называемая *механической работой*.

Пусть материальная точка движется по некоторой не обязательно прямолинейной траектории (рис. 18). Пусть также на материальную точку действует сила  $\vec{F}$ , которая в общем случае в процессе движения может меняться как по модулю, так и по направлению. Разобьём траекторию на множество сколь угодно малых участков, каждый из которых можно считать прямолинейным, а силу  $\vec{F}$  на каждом таком участке можно считать постоянной. Рассмотрим малое перемещение  $\Delta\vec{S}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

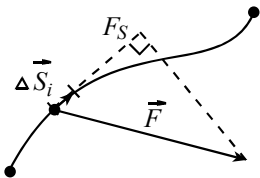


Рис. 18

*Работой  $\Delta A_i$  силы  $\vec{F}$  на малом перемещении*

$\Delta\vec{S}_i$  называют величину, равную скалярному произведению векторов  $\vec{F}$  и  $\Delta\vec{S}_i$ :  $\Delta A_i = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S}_i$ .

По определению скалярного произведения можно записать:

$$\Delta A_i = F \cdot \Delta S_i \cdot \cos \alpha_i = F_{S,i} \cdot \Delta S_i = F \cdot \Delta S_{i,F},$$

где  $\alpha_i$  – угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\Delta\vec{S}_i$ ,  $F_{S,i}$  – проекция  $\vec{F}$  на направление  $\Delta\vec{S}_i$ ,  $\Delta S_{i,F}$  – проекция  $\Delta\vec{S}_i$  на направление  $\vec{F}$ .

Работа  $A$  силы  $\vec{F}$  на всём участке траектории равна алгебраической сумме работ  $\Delta A_i$ , совершаемых силой  $\vec{F}$  на каждом из малых участков, на которые разбита траектория:  $A = \sum_i \Delta A_i$ . Когда на материаль-

ную точку действуют  $n$  сил, их общая работа  $A$  равна алгебраической сумме работ каждой из сил в отдельности:  $A = \sum_{j=1}^n A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Если мы имеем дело не с материальной точкой, а с твёрдым телом или системой тел, то данное выше определение работы остаётся справедливым, но в этом случае надо только иметь в виду, что под  $\Delta \vec{S}$  следует понимать *перемещение точки приложения силы  $\vec{F}$* . Игнорирование этого обстоятельства зачастую приводит к ошибочным результатам.

Часто говорят о работе, которую совершает или может совершить над телом какое-либо другое тело. Здесь, во избежание недоразумений, надо чётко понимать, что по определению работу над телом совершает *сила, действующая на него со стороны рассматриваемого другого тела*.

Способность конкретного тела совершать работу характеризуют с помощью *энергии*. Кинетической энергией  $K_i$  движущейся  $i$ -й материальной точки называют половину произведения массы  $m_i$  точки на квадрат её скорости  $v_i$ , т. е.  $K_i = m_i v_i^2 / 2$ .

Для определения кинетической энергии конкретного твёрдого тела его следует мысленно разбить на множество материальных точек. *Кинетическая энергия  $K$  тела будет равна алгебраической сумме кинетических энергий  $K_i$  этих материальных точек*:  $K = \sum_i K_i$ .

В случае, когда тело массой  $m$  движется поступательно (не вращаясь), скорости  $v_i$  составляющих его материальных точек в каждый конкретный момент времени одинаковы и равны скорости  $v$  поступательного движения тела. Тогда кинетическая энергия  $K$  такого тела в соответствии со сказанным выше в каждый момент времени равна

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_i m_i.$$

Очевидно, что  $\sum_i m_i = m$ , где  $m$  – масса тела. Следовательно, *кинетическая энергия  $K$  тела массой  $m$ , движущегося поступательно со скоростью  $v$ , равна  $K = \frac{mv^2}{2}$* . Если движение тела не поступательное

(присутствует вращение), то для нахождения его кинетической энергии эта формула непосредственно не применима!

Так, например, в случае, когда однородный обруч массой  $m$  катится без проскальзывания со скоростью  $v$  по горизонтальной поверхности, его кинетическая энергия равна  $K = mv^2$ .

Кинетическая энергия тела есть мера его движения. *Приращение кинетической энергии  $\Delta K$  рассматриваемого тела равно суммарной работе  $A$  всех сил, действующих на тело:*

$$\Delta K = A. \quad (13)$$

Здесь  $\Delta K$  – разность между конечным  $K_2$  и начальным  $K_1$  значениями кинетической энергии  $\Delta K = K_2 - K_1$ . Утверждение (13) называется *теоремой об изменении кинетической энергии*.

Силы, действующие на тело, могут различаться по своей природе и свойствам. В механике сложилось, в частности, разделение сил на консервативные и неконсервативные. *Консервативными* (или потенциальными) называются силы, работа которых не зависит от траектории движения тела, а определяется только начальным и конечным его положением. Такими силами являются, например, сила тяжести и сила упругости. В общем случае работа любых консервативных сил может быть представлена как убыль некоторой величины  $\Pi$ , которую называют *потенциальной энергией* тела:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (14)$$

(Убыль величины отличается от приращения знаком  $\Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta\Pi$ ).

Например, потенциальная энергия тела массы  $m$ , находящегося на высоте  $h$  над поверхностью земли, равна  $\Pi = mgh$ , если за "нулевой уровень" условно принята поверхность земли. Потенциальная энергия тела, находящегося под действием упругой силы деформированной пружины равна  $\Pi = kx^2 / 2$ , где  $x$  – величина деформации (сжатия или растяжения) пружины,  $k$  – коэффициент жёсткости пружины.

*Неконсервативными* называются силы, работа которых зависит от формы траектории и пройденного пути. Для таких сил равенство (14) несправедливо (понятие потенциальной энергии не применяется). Неконсервативными являются, например, сила трения скольжения, силы сопротивления воздуха или жидкости (зависящие от скорости).

Физическую величину, равную сумме кинетической и потенциальной энергий тела, называют его *механической энергией*  $E = K + \Pi$ . Можно показать, что приращение механической энергии равно суммарной работе  $A$  неконсервативных сил, действующих на тело в процессе движения. Следовательно, *если неконсервативные силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы над телом в течение интересующего нас времени, то механическая энергия тела остаётся постоянной*.

ной за это время:  $E = const$ . Это утверждение известно как закон сохранения механической энергии.

Взаимодействия тел, изучаемые в механике, отличаются большим разнообразием. Частным случаем таких взаимодействий являются *столкновения* тел. Среди них выделяют так называемые упругие и неупругие столкновения. Следует отметить, что в учебной литературе наблюдается некоторая неопределённость терминологии на этот счёт. Здесь мы будем называть столкновения, при которых сохраняется суммарная механическая энергия тел, *абсолютно упругими* (или просто *упругими*). Так, например, в большинстве случаев можно считать абсолютно упругим центральное столкновение двух стальных шаров.

Столкновения, при которых изменяется суммарная механическая энергия взаимодействующих тел, будем называть *неупругими*. Изменение суммарной механической энергии при таких столкновениях характеризуется её убылью и сопровождается, например, выделением тепла. Причём количество выделившейся теплоты в точности равно убыли механической энергии системы. Если тела после столкновения движутся как единое целое (с одинаковыми по величине и направлению скоростями), то такое столкновение будем называть *абсолютно неупругим*.

**ЗАДАЧА 10.** С наклонной плоскости одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать брусок и скатываться без проскальзывания обруч. При каком коэффициенте трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью оба тела будут двигаться, не обгоняя друг друга? Угол наклона плоскости к горизонту равен  $\alpha$ .

**РЕШЕНИЕ.** Из динамики известно, что ускорение  $a_1$  бруска, скользящего по наклонной плоскости вниз, равно  $a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .

Пусть обруч скатывается с наклонной плоскости в течение времени  $t$ . За это время его центр масс пройдёт путь  $l$ , равный длине наклонной плоскости. Пусть скорость центра масс обруча в конце этого пути равна  $v$ . Из кинематики известно, что  $l = \frac{a_2 t^2}{2}$ ,  $v = a_2 t$  (где  $a_2$  – ускорение центра масс обруча).

Приращение кинетической энергии обруча за время  $t$  равно  $\Delta K = K_2 - K_1$ . Поскольку  $K_1 = 0$  (по условию), а  $K_2 = Mv^2$ , где  $M$  – масса обруча, то  $\Delta K = Mv^2$ . С другой стороны по теореме об изменении кинетической энергии эта величина равна работе всех сил, действующих на обруч в течение времени  $t$ . С учётом этого имеем:

$$Mv^2 = Mgl \sin \alpha,$$

где  $Mgl \sin \alpha$  – работа силы тяжести (покажите это самостоятельно).

Сила нормальной реакции опоры работы не совершает, так как направлена перпендикулярно перемещению центра масс обруча. Работа силы трения также равна нулю, так как обруч катится без проскальзывания и, следовательно, в каждый момент времени скорость точки касания обруча с наклонной плоскостью (точки приложения силы трения) равна нулю. Учитывая кинематические уравнения, найдём  $a_2 = \frac{g}{2} \sin \alpha$ . Тела

не будут обгонять друг друга, если  $a_1 = a_2$ . Отсюда

$$\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

**ЗАДАЧА 11.** На подвижной тележке массой  $M$ , находящейся на горизонтальной плоскости, с помощью лёгкого стержня, который может свободно вращаться вокруг точки  $O$  (рис. 19), подвешен маленький шарик массой  $m$ . Вначале система покоилась. Шарику кратковременным ударом сообщают горизонтальную скорость  $v$ . На какую наибольшую высоту  $H$  по сравнению с первоначальным уровнем поднимется шарик? Считать, что угол отклонения стержня от вертикали не превышает  $90^\circ$ . Трением и массой колёс тележки пренебречь.

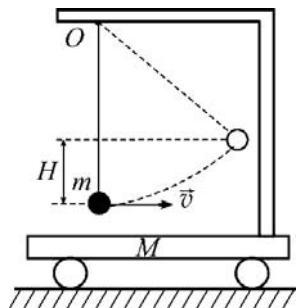


Рис. 19

(Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ, 2005 г.)

**РЕШЕНИЕ.** В горизонтальном направлении на систему «шарик–тележка» никакие силы не действуют (трения нет). Сила упругости стержня, на котором подвешен шарик, является внутренней силой и импульса системы изменить не может. Таким образом, проекция импульса системы «шарик – тележка» на горизонтальное направление сохраняется. В начальный момент она была равна  $mv$ , а в момент достижения шариком максимальной высоты  $H$  шарик и тележка движутся с одинаковой скоростью  $v_1$  в горизонтальном направлении (на рис. 19 – вправо). С учётом сохранения проекции импульса на направление движения тележки имеем:

$$mv = (m + M)v_1.$$

Считая потенциальную энергию шарика в поле силы тяжести в на-



чальный момент равной нулю, можно записать по закону сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgH + \frac{(m+M)v_1^2}{2}.$$

Из двух написанных уравнений получаем ответ:  $H = \frac{Mv^2}{2(M+m)g}$ .

**ЗАДАЧА 12.** Тело движется со скоростью  $v_1 = 6 \text{ м/с}$  и догоняет такое же тело, движущееся со скоростью  $v_2 = 3 \text{ м/с}$  (вдоль той же прямой). Определите скорости тел после центрального абсолютно упругого удара. (МИЭМ, 2006 г.)

**РЕШЕНИЕ.** Удар называется центральным, если скорости тел до удара направлены вдоль линии, соединяющей центры масс тел (рис. 20а). Заданные скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  направлены вдоль одной прямой. Направим ось  $Ox$  параллельно этой прямой в сторону движения тел. Пусть скорости тел после удара равны  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ . Эти скорости в данном случае могут быть только параллельными оси  $Ox$ . Предположительно направим их так, как показано на рис. 20б.

Систему тел будем считать замкнутой (в условии иного не оговорено). По закону сохранения импульса суммарный импульс тел до удара равен суммарному импульсу тел после удара. В проекциях на ось  $Ox$  можно, следовательно, записать:

$$mv_1 + mv_2 = mu_{1x} + mu_{2x}, \quad (15)$$

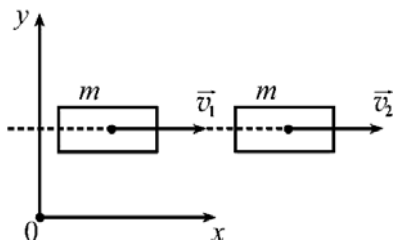


Рис. 20а

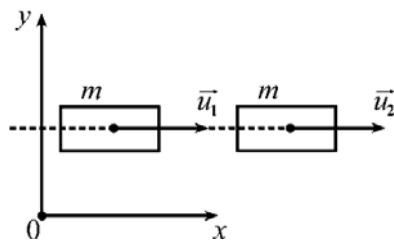


Рис. 20б

где  $u_{1x}$  и  $u_{2x}$  – проекции на ось  $Ox$  векторов  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  соответственно. (Если направления векторов  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  выбраны правильно, то  $u_{1x} = u_1$ , а  $u_{2x} = u_2$ ). По условию удар абсолютно упругий, следовательно суммарная механическая энергия тел сохраняется. Тогда

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}. \quad (16)$$

При этом, в связи с выше сказанным, независимо от знака проекций  $u_{1x}$  и  $u_{2x}$

$$u_1^2 = u_{1x}^2 \text{ и } u_2^2 = u_{2x}^2 \quad (17)$$

Перегруппируем слагаемые в (15) и сократим на  $m$ . Тогда получим:

$$v_1 - u_{1x} = u_{2x} - v_2 \quad (18)$$

Аналогично уравнение (16) преобразуем к виду

$$v_1^2 - u_1^2 = u_2^2 - v_2^2.$$

Или с учётом (17)

$$v_1^2 - u_{1x}^2 = u_{2x}^2 - v_2^2.$$

Воспользовавшись алгебраической формулой для разности квадратов, можно записать

$$(v_1 - u_{1x})(v_1 + u_{1x}) = (u_{2x} - v_2)(u_{2x} + v_2).$$

Поскольку  $v_1 - u_{1x} = u_{2x} - v_2$  (см. выше) и, очевидно,  $v_1 - u_{1x} \neq 0$  и  $u_{2x} - v_2 \neq 0$ , то сократив на эти выражения получим

$$v_1 + u_{1x} = u_{2x} + v_2 \quad (19)$$

Вычитая (18) из (19), найдём  $u_{1x} = v_2$ . Складывая (18) и (19), получим  $u_{2x} = v_1$ . Видим, что  $u_{1x}$  и  $u_{2x}$  получились положительными. Значит направления скоростей  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  указаны на рис. 19б верно. В рассматриваемом случае тела в результате удара «обмениваются» скоростями:

$$u_1 = v_2 = 3 \text{ м/с}, u_2 = v_1 = 6 \text{ м/с}.$$

**\* ЗАДАЧА 13.** Лёгкий пластилиновый шарик массы  $m$  летит со скоростью  $\vec{v}$  и сталкивается с массивной плитой, движущейся навстречу шарiku со скоростью  $\vec{u}$  (рис. 21). Какое количество теплоты выделится при абсолютно неупругом столкновении шарика с плитой? Массу  $M$  плиты считать много большей массы шарика ( $M \gg m$ ).

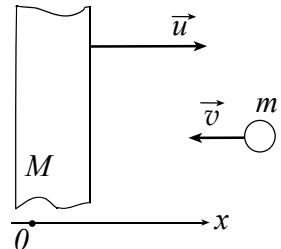


Рис. 21

**РЕШЕНИЕ.** Направим ось  $Ox$  в сторону движения плиты, как показано на рис. 20. Пусть  $\vec{u}_1$  — совместная скорость плиты с шариком после столкновения. Считая, что после столкновения плита с шариком движутся в том же на-

правления, что и плита до столкновения, по закону сохранения импульса (система тел замкнута) можно записать в проекциях на ось  $Ox$  уравнение:

$$Mu - mv = (M + m)u_1.$$

Отсюда скорость  $u_1$  равна:  $u_1 = \frac{Mu - mv}{M + m} = \frac{M}{M + m}u - \frac{m}{M + m}v$ .

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$u_1 = \frac{M}{M\left(1 + \frac{m}{M}\right)}u - \frac{m}{M\left(1 + \frac{m}{M}\right)}v = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}u - \frac{\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}v.$$

Считая отношение  $\frac{m}{M}$  близким к нулю (по условию  $M \gg m$ ) и пренебре-

гая им по сравнению с единицей  $\left(\frac{m}{M} \ll 1\right)$  в знаменателе уменьшаемого, а

вычитаемое по той же причине отбрасывая вовсе, получим  $u_1 = u$ , то есть после столкновения шарик с плитой движутся с той же скоростью, что и плита до столкновения. Иными словами, скорость плиты не изменилась. Перейдём в систему отсчёта, связанную с плитой. В свете сказанного эту систему отсчёта можно считать инерциальной. В ней плита покоится, а шарик до удара движется навстречу плите со скоростью  $v + u$ . Следовательно перед столкнове-

нием  $K = \frac{m(u + v)^2}{2}$ . После столкновения в выбранной системе отсчёта

плита и шарик покоятся, их суммарная механическая энергия равна нулю. Убыль суммарной механической энергии тел равна искомому количеству теплоты

$$Q = \frac{m(v + u)^2}{2}. *$$

**ЗАДАЧА 14.** Шар массой  $m_1 = 2$  кг, движущийся со скоростью  $v_1 = 2$  м/с, сталкивается с шаром массой  $m_2 = 1$  кг, движущимся со скоростью  $v_2 = 3$  м/с. В результате столкновения шары слипаются. Определите количество выделившейся при столкновении теплоты и совместную скорость шаров после столкновения. В момент столкновения скорости шаров взаимно перпендикулярны.

**РЕШЕНИЕ.** Из условия задачи следует, что столкновение абсолютно неупругое, и после него шары будут двигаться как одно целое (рис. 22). Считая систему тел замкнутой, по закону сохранения импульса име-

ем:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

где  $\vec{u}$  – совместная скорость слипшихся шаров после столкновения. Написанное уравнение проиллюстрировано на рис. 22. Возведём обе части этого уравнения в квадрат:

$$m_1^2 \vec{v}_1^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + m_2^2 \vec{v}_2^2 = (m_1 + m_2)^2 \vec{u}^2.$$

Поскольку по условию скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ . Учитывая также, что  $\vec{v}_1^2 = v_1^2$ ,  $\vec{v}_2^2 = v_2^2$ ,  $\vec{u}^2 = u^2$ , получим  $m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 = (m_1 + m_2)^2 u^2$ .

Откуда модуль искомой скорости  $u$  равен

$$u = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2} = \frac{5 \text{ м}}{3 \text{ с}} \approx 1,7 \text{ м/с}.$$

Направление скорости  $\vec{u}$  составляет угол  $\alpha$  с направлением скорости

$\vec{v}_1$  (рис. 23), причём  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{3}{4}$

(см. рис. 23). Искомое количество теплоты, выделившейся при столкновении, будет равно убыли суммарной механической энергии шаров:

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

С учётом ранее полученного выражения для  $u$ , после алгебраических

преобразований найдём окончательно  $Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \approx 4,3 \text{ Дж}$ .

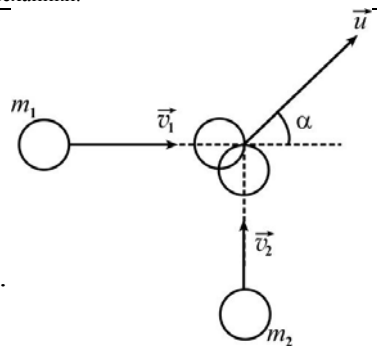


Рис. 22

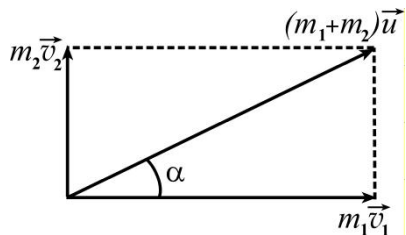


Рис. 23

### Контрольные вопросы

1. Камень брошен с поверхности земли под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ . Через какое время  $t$  камень окажется на высоте  $h = 1 \text{ м}$ ? Сопротивлением воздуха пренебречь.
2. Велосипедист съезжает с горки, двигаясь прямолинейно и равноус-

коренно. За время спуска скорость велосипедиста увеличилась на  $5 \text{ м/с}$ . Ускорение велосипедиста  $0,2 \text{ м/с}^2$ . Сколько времени длился спуск?

- 1)  $0,04 \text{ с}$ ; 2)  $2,5 \text{ с}$ ; 3)  $5 \text{ с}$ ; 4)  $25 \text{ с}$ ; 5)  $1 \text{ с}$ .

(По мотивам дем. варианта ЕГЭ, 2006 г.)

**3.** Скорость лыжника при равноускоренном прямолинейном спуске с горы за  $4 \text{ с}$  увеличилась на  $3 \text{ м/с}$ . Масса лыжника  $76 \text{ кг}$ . Равнодействующая всех сил, действующих на лыжника, равна

- 1)  $101 \text{ Н}$ ; 2)  $6 \text{ Н}$ ; 3)  $57 \text{ Н}$ ; 4)  $93 \text{ Н}$ ; 5)  $12 \text{ Н}$ ?

(По мотивам дем. варианта ЕГЭ, 2005 г.)

**4.** Брусok равномерно скользит по горизонтальной поверхности стола. Сила нормального давления бруска на поверхность стола равна  $40 \text{ Н}$ , сила трения скольжения  $8 \text{ Н}$ . Коэффициент трения скольжения равен

- 1)  $0,5$ ; 2)  $0,25$ ; 3)  $0,2$ ; 4)  $0,75$ ; 5)  $0,8$ ?

(По мотивам дем. варианта ЕГЭ, 2008 г.)

**5.** С каким ускорением будет скользить брусok вниз по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  при коэффициенте трения скольжения  $\mu = 0,2$ ?

**6\*.** Небольшое тело массой  $m = 1 \text{ кг}$ , брошенное под углом к горизонту имеет в верхней точке траектории полное ускорение  $a = 12 \text{ м/с}^2$ . Чему равна сила сопротивления воздуха, действующая на тело в этой точке?

**7.** Что называют импульсом тела (материальной точки)?

**8.** Тело движется по прямой. Под действием постоянной силы величиной  $7 \text{ Н}$  за  $3 \text{ с}$  импульс тела увеличился и стал равен  $30 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Первоначальный импульс тела равен

- 1)  $7 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ; 2)  $3 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ; 3)  $21 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ; 4)  $10 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ; 5)  $9 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ?

(По мотивам дем. варианта ЕГЭ, 2010 г.)

**9.** Чему равна кинетическая энергия движущегося тела массой  $m$ , если его импульс равен  $\vec{p}$ ?

**10.** Тележка едет без трения по столу. На тележку быстро насыпают песок, масса которого равна массе тележки. Сравните кинетическую энергию  $K_2$  тележки с песком с начальной кинетической энергией те-

лежки  $K_1$ .

Выберите правильный ответ и объясните свой выбор.

1)  $K_2 > K_1$  в 2 раза; 2)  $K_2 > K_1$  в 4 раза; 3)  $K_2 = K_1$ ;

4)  $K_2 < K_1$  в 2 раза; 5)  $K_2 < K_1$  в 4 раза.

(РГТУ–МАТИ, 2005 г.)

### Задачи

1. С балкона вертикально вверх бросают мяч. Через время  $\tau$  скорость летящего вверх мяча уменьшается на 20%. С какой высоты был произведён бросок, если в момент удара о землю скорость мяча в два раза превышала начальную? Сопротивление воздуха не учитывать.

(МФТИ, 2008 г.)

2. Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю в 16 м от места броска. Чему была равна скорость камня через 2 с после броска, если в этот момент она была направлена горизонтально? Сопротивлением воздуха пренебречь.

(По мотивам дем. варианта ЕГЭ, 2007, часть 2.)

3. Два бруска массами  $m_1 = m$  и  $m_2 = 2m$  находятся на горизонтальной шероховатой поверхности. Бруски связаны лёгкой нерастяжимой нитью. Если заставить бруски равномерно скользить, прикладывая внешнюю горизонтальную силу  $F$  к первому бруску, то сила натяжения нити оказывается в  $k$  раз меньше силы  $F$ . Во сколько раз отличаются коэффициенты трения скольжения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  брусков о поверхность?

(ФЗФТШ при МФТИ, 2010 г.)

4\*. Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности земли под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту со скоростью  $v = 10$  м/с, упал на землю, имея вертикальную составляющую скорости по абсолютной величине на 30% меньшую, чем при бросании. Найдите время полёта мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча пропорциональна его скорости. (МФТИ, 1989 г.)

5. Составной стержень представляет собой два соосных цилиндра разной длины, прижатых друг к другу торцами. Цилиндры имеют одинаковые площади поперечного сечения, но изготовлены из материалов с разными плотностями:  $\rho_1 = \rho$  и  $\rho_2 = 2\rho$ . Оказалось, что стержень будет находиться в равновесии в горизонтальном положении, если его подвесить на нити, закреплённой в месте стыка цилиндров. Определите отношение масс цилиндров. (ФЗФТШ при МФТИ, 2010 г.)

**6\***. Дифференциальный блок состоит из двух скреплённых между собой и насаженных на общую горизонтальную ось  $O$  барабанов с радиусами  $r_1 = 9$  см и  $r_2 = 13$  см. На барабаны намотан замкнутый трос (цепь), перекинутый через подвижной блок (рис. 24). В устройстве обеспечены условия непроскальзывания троса по барабанам. Найдите минимальную силу  $F$ , которую необходимо приложить к тросу, чтобы поднимать груз массой  $m = 65$  кг. (МФТИ, 2008 г.)

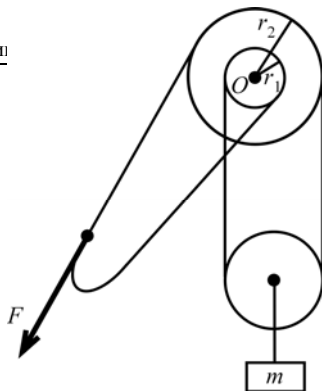


Рис. 24

**7.** Летящий снаряд разрывается на два осколка. По отношению к направлению движения снаряда первый осколок летит под углом  $45^\circ$  со скоростью  $40$  м/с, а второй – под углом  $30^\circ$  со скоростью  $80$  м/с. Найдите отношение массы первого осколка к массе второго осколка. (По мотивам дем. варианта ЕГЭ, 2009, часть 2.)

**8\***. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоятся незакреплённые горки массами  $4m$  и  $5m$  (рис. 25). На вершине горки массой  $4m$  на высоте  $h$  лежит монета массой  $m$ . От незначительного толчка монета съезжает с горки в направлении другой горки.

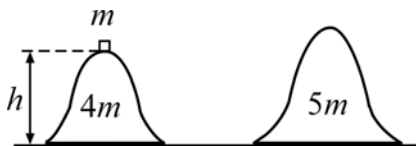


Рис. 25

1) Найдите скорость монеты на столе.

2) На какую максимальную высоту сможет подняться монета на горке массой  $5m$ ?

Поверхности горок гладкие. Горки имеют плавный переход к поверхности стола. Монета не отрывается от поверхности горок, а поступательно движущиеся горки – от стола. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

(МФТИ, 2008 г.)

**9.** Шарик, движущийся со скоростью  $v$  по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на лежащий неподвижно на той же поверхности кубик. После неупругого удара шарик остановился, а кубик стал двигаться поступательно со скоростью  $v/3$ . Какая часть первоначальной кинетической энергии шарика перешла в теплоту? (Шарик перед ударом не вращался.)

(МФТИ, 2008 г.)

**10\***. Брусок с выемкой в форме полуцилиндра радиусом  $R$  движется со скоростью  $u$  по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 26).

Небольшая по сравнению с размерами бруска монета массой  $m$  скользит по столу со скоростью  $v$  навстречу бруску, скользит далее по гладкой поверхности выемки, не отрываясь от неё, и оказывается в точке  $B$ , продолжая скользить по выемке вверх. Радиус  $OB$  составляет угол  $\varphi$  ( $\cos \varphi = \frac{2}{3}$ ) с вертикалью. Масса бруска намного больше массы монеты.

- 1) Найдите скорость монеты относительно бруска в точке  $B$ .
  - 2) Найдите силу давления монеты на брусок в точке  $B$ .
- (МФТИ, 2005 г.)

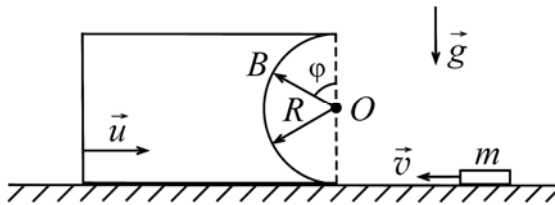


Рис. 26