§ 4. Импульс. Работа. Энергия

Решение механических задач часто облегчается применением законов изменения и сохранения импульса и энергии тела. Особенно эффективным является использование этих законов в тех случаях, когда действующие силы переменны во времени и непосредственное решение уравнений динамики с помощью методов элементарной математики затруднительно.

Напомним, что *импульсом тела* называется векторная величина $\vec{p}$, равная произведению массы m тела на его скорость $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Импульсом системы тел $\vec{P}$ называют векторную сумму импульсов всех тел, составляющих эту систему. Например, если система состоит из трёх тел с импульсами $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ и $\vec{p}_3$, то импульс такой системы тел равен $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$.

В общем случае импульс тела в процессе движения может изменяться как по величине, так и по направлению. При этом справедлив *закон изменения импульса тела:* *приращение импульса тела равно произведению равнодействующей силы* $\vec{F}$ *на промежуток времени* Δt, *в течение которого она действует на тело* $\Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t$. Произведение $\vec{F}\cdot\Delta t$ называют *импульсом силы.* Аналогичное соотношение справедливо и для системы тел, только в этом случае под $\vec{F}$ надо понимать равнодействующую только внешних сил: *приращение* $\Delta\vec{P}$ *импульса системы тел равно импульсу равнодействующей* $\vec{F}$ *внешних сил, действующих на систему* $\Delta\vec{P} = \vec{F}\cdot\Delta t$. Внутренние силы взаимодействия между телами, входящими в систему, не могут изменить импульс системы.

Из сказанного следует *закон сохранения импульса* системы тел (или отдельно взятого тела). *Импульс системы тел (тела) сохраняется (т.е.* $\Delta\vec{P} = 0\big)$ *при любых взаимодействиях тел системы, если импульс равнодействующей* $\vec{F}$ *внешних сил* $\vec{F}\cdot\Delta t$ *равен нулю.* Это возможно в каком-либо из трёх случаев:

1) если внешние силы на систему (тело) не действуют вообще (система изолированная);

2) если равнодействующая $\vec{F}$ внешних сил, действующих на систему(тело), равна нулю;

3) если промежуток времени Δt, в течение которого на систему (тело) действуют внешние силы мал $(\Delta t \to 0)$, а равнодействующая $\vec{F}$ ограничена по модулю (не бесконечно большая).

Встречаются ситуации, когда импульс системы тел (тела) в целом не сохраняется, но *сохраняется проекция* P_x импульса на некоторое направление Ox $(\Delta P_x = 0)$. Это возможно в трёх случаях:

1) если внешние силы, действующие на систему (тело), направлены перпендикулярно оси Ox;

2) если проекция F_x на ось Ox равнодействующей $\vec{F}$ внешних сил равна нулю;

3) если промежуток времени Δt мал, а проекция F_x ограничена

по модулю $\left(\left|F_x\right| \neq \infty\right)$.

Часто при решении задач для определения импульса системы тел бывает удобно воспользоваться понятием *центра масс* рассматриваемой системы. Можно показать, что *импульс* $\vec{P}$ *системы тел равен произведению массы* M *системы (т. е. суммы масс тел, входящих в систему) на скорость* $\vec{v}_c$ *движения её центра масс (точки* C*):* $\vec{P} = M\vec{v}_c$. В связи с этим справедлива <u>*теорема о движении центра масс*</u>*: центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием силы, равной векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.* Использование сформулированной теоремы позволяет, порой, существенно упростить процесс решения задачи.

Изменение импульса тела (системы) характеризует действие силы в течение конкретного промежутка времени. Для характеристики действия силы на определённом перемещении служит физическая величина, называемая *механической работой.*

Пусть материальная точка движется по некоторой не обязательно прямолинейной траектории (рис. 18). Пусть также на материальную точку действует сила $\vec{F}$, которая в общем случае в процессе движения может меняться как по модулю, так и по направлению. Разобьём траекторию на множество сколь угодно малых участков, каждый из которых можно считать прямолинейным, а силу $\vec{F}$ на каждом таком участке можно считать постоянной. Рассмотрим малое перемещение $\Delta\vec{S}_i$, $i = 1, 2, ...$

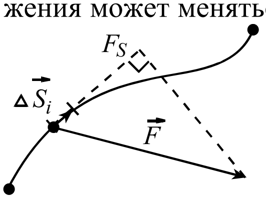

Рис. 18

Работой ΔA_i *силы* $\vec{F}$ *на малом перемещении* $\Delta\vec{S}_i$ *называют величину, равную скалярному произведению векторов* $\vec{F}$ *и* $\Delta\vec{S}_i$: $\Delta A_i = \vec{F}\cdot\Delta\vec{S}_i$.

По определению скалярного произведения можно записать:

$$\Delta A_i = F\cdot\Delta S_i\cdot\cos\alpha_i = F_{S,i}\cdot\Delta S_i = F\cdot\Delta S_{i,F},$$

где α_i – угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{S}_i$, $F_{S,i}$ – проекция $\vec{F}$ на направление $\Delta\vec{S}_i$, $\Delta S_{i,F}$ – проекция $\Delta\vec{S}_i$ на направление $\vec{F}$.

Работа A силы $\vec{F}$ на всём участке траектории равна алгебраической сумме работ ΔA_i, совершаемых силой $\vec{F}$ на каждом из малых участков, на которые разбита траектория: $A = \sum\limits_i \Delta A_i$. Когда на материальную точку действуют n сил, их общая работа A равна алгебраической сумме работ каждой из сил в отдельности: $A=\sum_{j=1}^{n} A_i, \;\; j=1,2,...,n.$

Если мы имеем дело не с материальной точкой, а с твёрдым телом или системой тел, то данное выше определение работы остаётся справедливым, но в этом случае надо только иметь в виду, что под $\Delta\vec{S}$ следует понимать *перемещение точки приложения силы* $\vec{F}$. Игнорирование этого обстоятельства зачастую приводит к ошибочным результатам.

Часто говорят о работе, которую совершает или может совершить над телом какое-либо другое тело. Здесь, во избежание недоразумений, надо чётко понимать, что по определению работу над телом совершает *сила, действующая на него со стороны рассматриваемого другого тела.*

Способность конкретного тела совершать работу характеризуют с помощью *энергии.* Кинетической энергией K_i движущейся i-й материальной точки называют половину произведения массы m_i точки на квадрат её скорости v_i, т. е. $K_i = m_i v_i^2/2.$

Для определения кинетической энергии конкретного твёрдого тела его следует мысленно разбить на множество материальных точек. *Кинетическая энергия* K *тела будет равна алгебраической сумме кинетических энергий* K_i этих материальных точек: $K=\sum_i K_i.$

В случае, когда тело массой m движется поступательно (не вращаясь), скорости v_i составляющих его материальных точек в каждый конкретный момент времени одинаковы и равны скорости v поступательного движения тела. Тогда кинетическая энергия K такого тела в соответствии со сказанным выше в каждый момент времени равна

$$K=\sum_i K_i=\sum_i \frac{m_i v^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum_i m_i.$$

Очевидно, что $\sum_i m_i = m,$ где $m-$ масса тела. Следовательно, *кинетическая энергия* K *тела массой* m, *движущегося поступательно со скоростью* v, *равна* $K=\dfrac{mv^2}{2}.$ Если движение тела не поступательное (присутствует вращение), то для нахождения его кинетической энергии эта формула непосредственно не применима!

Так, например, в случае, когда однородный обруч массой m катится без проскальзывания со скоростью v по горизонтальной поверхности, его кинетическая энергия равна $K = mv^2$.

Кинетическая энергия тела есть мера его движения. *Приращение кинетической энергии ΔK рассматриваемого тела равно суммарной работе A всех сил, действующих на тело:*

$$\Delta K = A. \tag{13}$$

Здесь $\Delta K -$ разность между конечным K_2 и начальным K_1 значениями кинетической энергии $\Delta K = K_2 - K_1$. Утверждение (13) называется *<u>теоремой об изменении кинетической энергии.</u>*

Силы, действующие на тело, могут различаться по своей природе и свойствам. В механике сложилось, в частности, разделение сил на консервативные и неконсервативные. *Консервативными* (или потенциальными) называются силы, работа которых не зависит от траектории движения тела, а определяется только начальным и конечным его положением. Такими силами являются, например, сила тяжести и сила упругости. В общем случае работа любых консервативных сил может быть представлена как убыль некоторой величины Π, которую называют *потенциальной энергией* тела:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2. \tag{14}$$

(Убыль величины отличается от приращения знаком $\Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta\Pi$).

Например, потенциальная энергия тела массы m, находящегося на высоте h над поверхностью земли, равна $\Pi = mgh$, если за "нулевой уровень" условно принята поверхность земли. Потенциальная энергия тела, находящегося под действием упругой силы деформированной пружины равна $\Pi = kx^2/2$, где $x-$ величина деформации (сжатия или растяжения) пружины, $k-$ коэффициент жёсткости пружины.

Неконсервативными называются силы, работа которых зависит от формы траектории и пройденного пути. Для таких сил равенство (14) несправедливо (понятие потенциальной энергии не применяется). Неконсервативными являются, например, сила трения скольжения, силы сопротивления воздуха или жидкости (зависящие от скорости).

Физическую величину, равную сумме кинетической и потенциальной энергий тела, называют его *механической энергией* $E = K + \Pi$. Можно показать, что приращение механической энергии равно суммарной работе A неконсервативных сил, действующих на тело в процессе движения. Следовательно, *если неконсервативные силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы над телом в течение интересующего нас времени, то механическая энергия тела остаётся постоян-*

ной за это время: $E = const$. Это утверждение известно как *закон сохранения механической энергии.*

Взаимодействия тел, изучаемые в механике, отличаются большим разнообразием. Частным случаем таких взаимодействий являются *столкновения* тел. Среди них выделяют так называемые упругие и неупругие столкновения. Следует отметить, что в учебной литературе наблюдается некоторая неопределённость терминологии на этот счёт. Здесь мы будем называть столкновения, при которых сохраняется суммарная механическая энергия тел, *абсолютно упругими* (или просто *упругими*). Так, например, в большинстве случаев можно считать абсолютно упругим центральное столкновение двух стальных шаров.

Столкновения, при которых изменяется суммарная механическая энергия взаимодействующих тел, будем называть *неупругими.* Изменение суммарной механической энергии при таких столкновениях характеризуется её убылью и сопровождается, например, выделением тепла. Причём количество выделившейся теплоты в точности равно убыли механической энергии системы. Если тела после столкновения движутся как единое целое (с одинаковыми по величине и направлению скоростями), то такое столкновение будем называть *абсолютно неупругим.*

ЗАДАЧА 10. С наклонной плоскости одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать брусок и скатываться без проскальзывания обруч. При каком коэффициенте трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью оба тела будут двигаться, не обгоняя друг друга? Угол наклона плоскости к горизонту равен α.

РЕШЕНИЕ. Из динамики известно, что ускорение a_1 бруска, скользящего по наклонной плоскости вниз, равно $a_1 = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$.

Пусть обруч скатывается с наклонной плоскости в течение времени t. За это время его центр масс пройдёт путь l, равный длине наклонной плоскости. Пусть скорость центра масс обруча в конце этого пути равна v. Из кинематики известно, что $l = \dfrac{a_2 t^2}{2}$, $v = a_2 t$ (где $a_2 -$ ускорение центра масс обруча).

Приращение кинетической энергии обруча за время t равно $\Delta K = K_2 - K_1$. Поскольку $K_1 = 0$ (по условию), а $K_2 = Mv^2$, где $M -$ масса обруча, то $\Delta K = Mv^2$. С другой стороны по теореме об изменении кинетической энергии эта величина равна работе всех сил, действующих на обруч в течение времени t. С учётом этого имеем:

$$Mv^2 = Mgl\sin\alpha,$$

где $Mgl\sin\alpha -$ работа силы тяжести (покажите это самостоятельно).

Сила нормальной реакции опоры работы не совершает, так как направлена перпендикулярно перемещению центра масс обруча. Работа силы трения также равна нулю, так как обруч катится без проскальзывания и, следовательно, в каждый момент времени скорость точки касания обруча с наклонной плоскостью (точки приложения силы трения) равна нулю. Учитывая кинематические уравнения, найдём $a_2 = \frac{g}{2}\sin\alpha$. Тела не будут обгонять друг друга, если $a_1 = a_2$. Отсюда

$$\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

ЗАДАЧА 11. На подвижной тележке массой M, находящейся на горизонтальной плоскости, с помощью лёгкого стержня, который может свободно вращаться вокруг точки O (рис. 19), подвешен маленький шарик массой m. Вначале система покоилась. Шарику кратковременным ударом сообщают горизонтальную скорость v. На какую наибольшую высоту H по сравнению с первоначальным уровнем поднимется шарик? Считать, что угол отклонения стержня от вертикали не превышает 90°. Трением и массой колёс тележки пренебречь.
(Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ, 2005 г.)

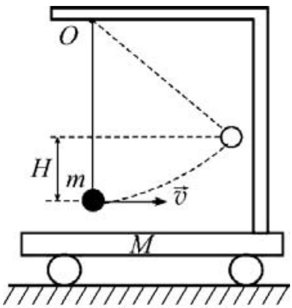

Рис. 19

РЕШЕНИЕ. В горизонтальном направлении на систему «шарик–тележка» никакие силы не действуют (трения нет). Сила упругости стержня, на котором подвешен шарик, является внутренней силой и импульса системы изменить не может. Таким образом, проекция импульса системы «шарик – тележка» на горизонтальное направление сохраняется. В начальный момент она была равна mv, а в момент достижения шариком максимальной высоты H шарик и тележка движутся с одинаковой скоростью v_1 в горизонтальном направлении (на рис. 19 – вправо). С учётом сохранения проекции импульса на направление движения тележки имеем:

$$mv = \left(m + M\right)v_1.$$

Считая потенциальную энергию шарика в поле силы тяжести в начальный момент равной нулю, можно записать по закону сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgH + \frac{(m+M)v_1^{\,2}}{2}.$$

Из двух написанных уравнений получаем ответ: $H = \dfrac{Mv^2}{2(M+m)g}$.

ЗАДАЧА 12. Тело движется со скоростью $v_1 = 6\,\text{м/с}$ и догоняет такое же тело, движущееся со скоростью $v_2 = 3\,\text{м/с}$ (вдоль той же прямой). Определите скорости тел после центрального абсолютно упругого удара. (МИЭМ, 2006 г.)

РЕШЕНИЕ. Удар называется центральным, если скорости тел до удара направлены вдоль линии, соединяющей центры масс тел (рис. 20а). Заданные скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены вдоль одной прямой. Направим ось Ox параллельно этой прямой в сторону движения тел. Пусть скорости тел после удара равны $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Эти скорости в данном случае могут быть только параллельными оси Ox. Предположительно направим их так, как показано на рис. 20б.

Систему тел будем считать замкнутой (в условии иного не оговорено). По закону сохранения импульса суммарный импульс тел до удара равен суммарному импульсу тел после удара. В проекциях на ось Ox можно, следовательно, записать:

$$mv_1 + mv_2 = mu_{1x} + mu_{2x}, \qquad (15)$$

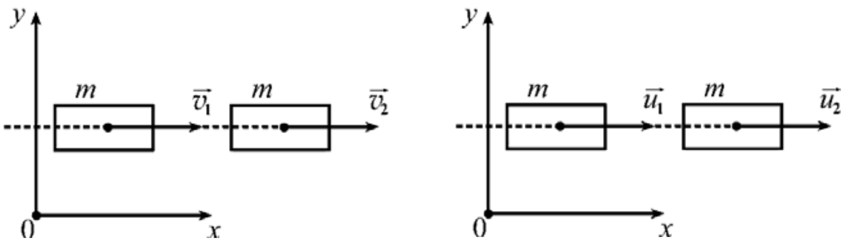

Рис. 20а **Рис. 20б**

где u_{1x} и u_{2x} – проекции на ось Ox векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ соответственно. (Если направления векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ выбраны правильно, то $u_{1x} = u_1$, а $u_{2x} = u_2$). По условию удар абсолютно упругий, следовательно суммарная механическая энергия тел сохраняется. Тогда

$$\frac{mv_1^{\ 2}}{2}+\frac{mv_2^{\ 2}}{2}=\frac{mu_1^{\ 2}}{2}+\frac{mu_2^{\ 2}}{2}. \qquad (16)$$

При этом, в связи с выше сказанным, независимо от знака проекций u_{1x} è u_{2x}

$$u_1^{\ 2}=u_{1x}^{\ \ 2} \text{ и } u_2^{\ 2}=u_{2x}^{\ \ 2} \qquad (17)$$

Перегруппируем слагаемые в (15) и сократим на m. Тогда получим:

$$v_1-u_{1x}=u_{2x}-v_2 \qquad (18)$$

Аналогично уравнение (16) преобразуем к виду

$$v_1^{\ 2}-u_1^{\ 2}=u_2^{\ 2}-v_2^{\ 2}.$$

Или с учётом (17)

$$v_1^{\ 2}-u_{1x}^2=u_{2x}^2-v_2^{\ 2}.$$

Воспользовавшись алгебраической формулой для разности квадратов, можно записать

$$\left(v_1-u_{1x}\right)\left(v_1+u_{1x}\right)=\left(u_{2x}-v_2\right)\left(u_{2x}+v_2\right).$$

Поскольку $v_1-u_{1x}=u_{2x}-v_2$ (см. выше) и, очевидно, $v_1-u_{1x}\neq 0$ и $u_{2x}-v_2\neq 0,$ то сократив на эти выражения получим

$$v_1+u_{1x}=u_{2x}+v_2 \qquad (19)$$

Вычитая (18) из (19), найдём $u_{1x}=v_2$. Складывая (18) и (19), получим $u_{2x}=v_1$. Видим, что u_{1x} и u_{2x} получились положительными. Значит направления скоростей $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ указаны на рис. 19б верно. В рассматриваемом случае тела в результате удара «обмениваются» скоростями:

$$u_1=v_2=3\,\text{м/с}\,,\, u_2=v_1=6\,\text{м/с}.$$

∗ ЗАДАЧА 13. Лёгкий пластилиновый шарик массы m летит со скоростью $\vec{v}$ и сталкивается с массивной плитой, движущейся навстречу шарику со скоростью $\vec{u}$ (рис. 21). Какое количество теплоты выделится при абсолютно неупругом столкновении шарика с плитой? Массу M плиты считать много большей массы шарика $\left(M>>m\right)$.

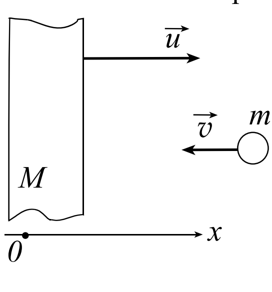

Рис. 21

РЕШЕНИЕ. Направим ось Ox в сторону движения плиты, как показано на рис. 20. Пусть $\overrightarrow{u_1}$ – совместная скорость плиты с шариком после столкновения. Считая, что после столкновения плита с шариком движутся в том же направлении, что и плита до столкновения, по закону сохранения импульса (система тел замкнута) можно записать в проекциях на ось Ox уравнение:

$$Mu - mv = (M+m)u_1.$$

Отсюда скорость u_1 равна: $u_1 = \dfrac{Mu - mv}{M+m} = \dfrac{M}{M+m}u - \dfrac{m}{M+m}v.$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$u_1 = \frac{M}{M\left(1+\frac{m}{M}\right)}u - \frac{m}{M\left(1+\frac{m}{M}\right)}v = \frac{1}{1+\frac{m}{M}}u - \frac{\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}v.$$

Считая отношение $\dfrac{m}{M}$ близким к нулю (по условию $M >> m$) и пренебрегая им по сравнению с единицей $\left(\dfrac{m}{M} << 1\right)$ в знаменателе уменьшаемого, а вычитаемое по той же причине отбрасывая вовсе, получим $u_1 = u$, то есть после столкновения шарик с плитой движутся с той же скоростью, что и плита до столкновения. Иными словами, скорость плиты не изменилась. Перейдём в систему отсчёта, связанную с плитой. В свете сказанного эту систему отсчёта можно считать инерциальной. В ней плита покоится, а шарик до удара движется навстречу плите со скоростью $v+u$. Следовательно перед столкновением $K = \dfrac{m(u+v)^2}{2}$. После столкновения в выбранной системе отсчёта плита и шарик покоятся, их суммарная механическая энергия равна нулю. Убыль суммарной механической энергии тел равна искомому количеству теплоты

$$Q = \frac{m(v+u)^2}{2}. \quad *$$

ЗАДАЧА 14. Шар массой $m_1 = 2$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 2$ м/с, сталкивается с шаром массой $m_2 = 1$ кг, движущимся со скоростью $v_2 = 3$ м/с. В результате столкновения шары слипаются. Определите количество выделившейся при столкновении теплоты и совместную скорость шаров после столкновения. В момент столкновения скорости шаров взаимно перпендикулярны.

РЕШЕНИЕ. Из условия задачи следует, что столкновение абсолютно неупругое, и после него шары будут двигаться как одно целое (рис. 22). Считая систему тел замкнутой, по закону сохранения импульса имеем:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u},$$

где $\vec{u}-$ совместная скорость слипшихся шаров после столкновения. Написанное уравнение проиллюстрировано на рис. 22. Возведём обе части этого уравнения в квадрат:

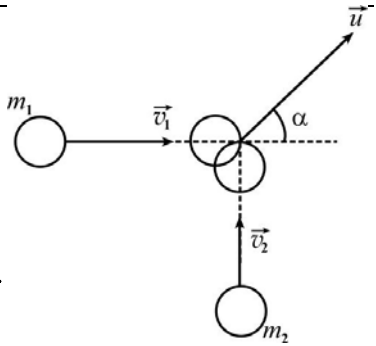

Рис. 22

$$m_1^2\vec{v}_1^{\,2} + 2m_1m_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + m_2^2\vec{v}_2^{\,2} = \left(m_1 + m_2\right)^2\vec{u}^{\,2}.$$

Поскольку по условию скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$. Учитывая также, что $\vec{v}_1^{\,2} = v_1^2,\ \vec{v}_2^{\,2} = v_2^2,\ \vec{u}^{\,2} = u^2$, получим $m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 = \left(m_1 + m_2\right)^2 u^2$. Откуда модуль искомой скорости u равен

$$u = \frac{\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}}{m_1 + m_2} = \frac{5}{3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 1,7\,\text{м/с}.$$

Направление скорости $\vec{u}$ составляет угол α с направлением скорости $\vec{v}_1$ (рис. 23), причём $tg\alpha = \dfrac{m_2v_2}{m_1v_1} = \dfrac{3}{4}$ (см. рис. 23). Искомое количество теплоты, выделившейся при столкновении, будет равно убыли суммарной механической энергии шаров:

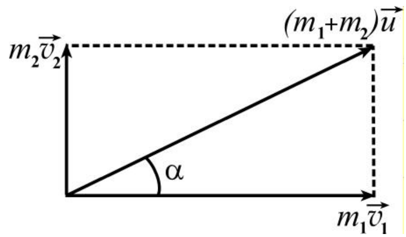

Рис. 23

$$Q = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{\left(m_1 + m_2\right)u^2}{2}.$$

С учётом ранее полученного выражения для u, после алгебраических преобразований найдём окончательно $Q = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\cdot\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2} \approx 4,3$ Дж.

