§3. Статика

В *статике* изучается равновесие тел. Наряду с моделью материальной точки, здесь в большинстве случаев используется *модель абсолютно твёрдого тела*, т.е. тела, форма и размеры которого считаются неизменными.

Будем считать, что *тело находится в равновесии в некоторой системе отсчёта, если в этой системе отсчёта оно покоится.*

Условием равновесия материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчёта является равенство нулю суммы всех сил, действующих на материальную точку:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \qquad (11)$$

Условием равновесия абсолютно твёрдого тела в некоторой инерциальной системе отсчёта является равенство нулю суммы всех внешних сил $\vec{F}_i$, *действующих на тело, и равенство нулю суммы моментов* M_i *всех внешних сил относительно любой оси в пространстве:*

$$\sum_i \vec{F} = 0; \sum_i M_i = 0. \qquad (12)$$

Приведённые выше векторные уравнения можно записывать в проекциях на любую координатную ось. При этом каждое из полученных равенств будет означать, что при равновесии тела сумма проекций на соответствующую координатную ось всех сил, входящих в векторное уравнение, равна нулю.

В случае, когда вектор силы, действующей на твёрдое тело, лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, *момент этой силы равен произведению модуля силы на её плечо,* т. е. расстояние от линии действия силы до оси вращения. Если же вектор силы не перпендикулярен оси вращения, то *момент такой силы равен моменту той её составляющей, которая перпендикулярна оси вращения.*

Выбор оси вращения для написания уравнения моментов в системе (12) осуществляется произвольно, исходя из соображений удобства решения конкретной задачи. Уравнение моментов будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты. При составлении уравнения моментов нужно помнить *правило знаков: моментам, вызы-*

вающим вращение тела по часовой стрелке относительно выбранной оси приписывают знак «+», а моментам, вызывающим вращение против часовой стрелки – знак «–».

Следует, однако, иметь в виду, что сформулированные условия равновесия являются необходимыми, но не достаточными условиями. Действительно, при выполнении этих условий и материальная точка и твёрдое тело могут не только покоиться (находиться в равновесии). Так, материальная точка при выполнении условия равновесия может двигаться равномерно и прямолинейно. Аналогично, центр масс твёрдого тела может двигаться равномерно и прямолинейно, а само тело может вращаться вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью. Но если известно, что материальная точка или твёрдое тело находятся в равновесии, то отсюда обязательно (необходимо) следует выполнение соответствующих условий равновесия!

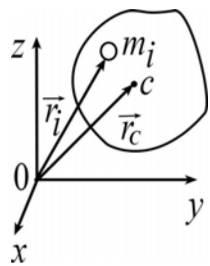

Рис. 11

В механике важное значение имеют понятия *центра масс* тела и *центра тяжести* тела (подразумевается модель абсолютно твёрдого тела). Если тело массой M мысленно разбить на множество сколь угодно малых частей с массами $m_1, m_2,\ m_3,...,$ каждую из которых можно считать материальной точкой, то пространственное положение *i*-й материальной точки с массой m_i можно определить радиус-вектором $\vec{r}_i$ (рис. 11). При этом очевидно, что $\sum_i m_i = M$.

Центром масс тела (или системы тел) называется точка C *(рис.12), радиус-вектор* $\vec{r}_C$ *которой определяется по формуле*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i.$$

Можно показать, что 1) положение центра масс относительно тела не зависит от выбора начала координат O, 2) центр масс однородного центрально симметричного тела совпадает с его центром симметрии, 3) центр масс однородного осесимметричного тела лежит на оси симметрии тела.

Кроме того, в ряде случаев при решении задач можно мысленно сосредоточить в центре масс всю массу тела и, считая тело материальной точкой, применять законы механики для материальной точки.

Центром тяжести тела, находящегося в поле тяготения, называ-

ют точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на все части тела. Эта сила называется *силой тяжести,* действующей на тело.

В однородном поле тяжести (например, вблизи поверхности Земли) центр тяжести тела совпадает с его центром масс. Заметим, что *центр масс существует независимо от поля тяжести, в то время как о центре тяжести имеет, смысл говорить только при наличии такого поля.*

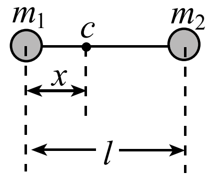

Рис. 12

Например, центр масс и центр тяжести гантели, представляющей собой два шарика с массами m_1 и m_2, соединённые жёстким невесомым стержнем длины l (рис. 12), совпадают и располагаются в точке C, отстоящей от шарика m_1 на расстояние $x = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l$ (покажите это самостоятельно). В отсутствие поля тяжести центр масс гантели остаётся в точке C, тогда как понятие центра тяжести теряет смысл.

ЗАДАЧА 7. Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску массой m, находящемуся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α, чтобы он не двигался?

РЕШЕНИЕ. На брусок (рис. 13) действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны наклонной плоскости и сила $\vec{F}$, которую надо найти. (Сила трения отсутствует, поскольку поверхность

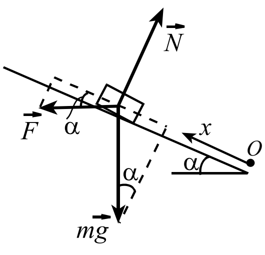

Рис. 13

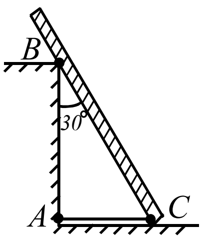

Рис. 14

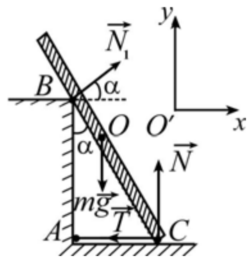

Рис. 15

наклонной плоскости гладкая.) Так как брусок находится в покое, запишем условие (11) равновесия бруска, считая его материальной точкой: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = 0.$ В проекциях на ось Ox, направленную вдоль наклонной плоскости (рис.14), это уравнение даёт: $F\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0.$ Откуда $F = mg\, tg\alpha.$

ЗАДАЧА 8. Однородная балка (рис. 14) массой $m\left(mg = 1200\text{Н}\right)$ и длиной 2м опирается о гладкий пол и гладкий выступ B на высоте $1,5$м над полом. Балка составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$ и удерживается верёвкой AC, натянутой у пола. Найдите силу натяжения верёвки и силы реакций пола и выступа.

РЕШЕНИЕ. На балку действуют (рис. 15) сила тяжести $m\vec{g}$ (приложенная к центру тяжести балки – точке O), сила натяжения нити $\vec{T}$ (приложенная к балке в точке C), сила $\vec{N}$ нормальной реакции со стороны пола (приложенная в точке C и направленная перпендикулярно полу, т. к. поверхность гладкая и трения нет) и сила $\vec{N}_1$ нормальной реакции со стороны выступа (приложенная в точке B и направленная перпендикулярно балке по той же причине отсутствия трения). Запишем условия (12) равновесия для балки, предварительно спроецировав указанные силы на оси $O'x$ и $O'y$ и выбрав для вычисления моментов этих сил ось, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости рисунка 15:

$$O'x: N_1\cos\alpha - T = 0,\; O'y: N_1\sin\alpha + N - mg = 0,$$

$$Ось\;\; C: N_1\cdot\left|BC\right| - mg\cdot\left|OC\right|\cdot\sin\alpha = 0.$$

Моменты сил $\vec{T}$ и $\vec{N}$ относительно оси C оказались нулевыми, поскольку линии действия этих сил проходят через точку C и, следовательно, их плечи равны нулю. В этих уравнениях $\left|BC\right| = \left|AB\right|/\cos\alpha =$ $=\sqrt{3}$ì и так как центр тяжести однородных симметричных тел расположен в их геометрическом центре или на оси симметрии (в нашем, случае посередине балки – в точке O), то $\left|OC\right| = 1$м.

Решив полученную систему из трёх уравнений, найдём

$$N_1 = mg\cdot\frac{\left|OC\right|}{\left|BC\right|}\cdot\sin\alpha = 200\sqrt{3}\text{Н},\; T = N_1\cos\alpha = 300\text{Н},$$

$$N = mg\cdot\left(1 - \frac{\left|OC\right|}{\left|BC\right|}\sin^2\alpha\right) \approx 1027\text{Н}.$$

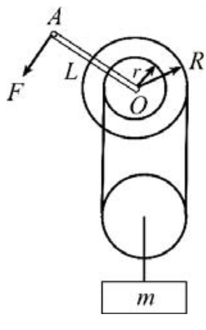

Рис. 16

* **ЗАДАЧА 9.** Дифференциальный ворот представляет собой два скреплённых соосных цилиндра радиусами $R = 10$ см и $r = 8$ см, на которые намотан трос (рис. 16). Трос перекинут через подвижный блок и его концы закреплены на цилиндрах. При вращении рукоятки OA длиной $L = 20$ см вокруг неподвижной гори-

зонтальной оси цилиндров O трос наматывается на большой цилиндр и сматывается с меньшего, а груз, подвешенный к подвижному блоку, поднимается. Массами цилиндров, рукоятки, троса, подвижного блока и трением в осях пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Найдите минимальную силу F, которую необходимо приложить к рукоятке ворота, чтобы поднимать груз массой $m = 140$ кг. (МФТИ, 2008г.)

РЕШЕНИЕ. Изобразим на рис. 17 силы, действующие на цилиндры и груз, где через T обозначена сила натяжения троса связывающего подвижный блок с дифференциальным воротом, через $T_1 -$ сила натяжения троса, на котором к подвижному блоку подвешен груз, а через $mg -$ сила тяжести груза.

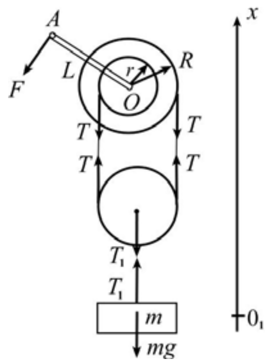

Рис. 17

Поскольку массой подвижного блока можно пренебречь, то в проекциях на ось O_1x можно записать

$$2T - T_1 = 0.$$

Для груза, находящегося в равновесии, в проекциях на ту же ось имеем:

$$T_1 - mg = 0.$$

Для моментов сил, действующих на дифференциальный ворот, относительно оси ворота, проходящей через точку O, справедливо уравнение:

$$TR - Tr - FL = 0.$$

Решая совместно три написанных уравнения, найдём

$$F = \frac{R-r}{2L} mg = 70 \text{ Н.} \quad *$$