§ 2. Динамика

В *динамике* механическое движение изучается в связи с причинами, вызывающими тот или иной его характер. В инерциальных системах отсчёта этими причинами являются различные *взаимодействия* рассматриваемого тела с другими телами, что выражается в наличии *сил,* действующих на тело.

В основе динамики материальной точки лежат законы Ньютона.

<u>1-й закон:</u> *тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не выведут его из этого состояния.*

Система отсчёта, по отношению к которой тело, свободное от внешних воздействий, покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется ***инерциальной системой отсчёта.***

<u>2-й закон</u>: *в инерциальных системах отсчёта ускорение* $\vec{a}$ *тела прямо пропорционально равнодействующей* $\vec{F}$ *всех сил, действующих на тело со стороны других тел, обратно пропорционально массе* m *тела и направлено в сторону* $\vec{F}$: $\quad \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}.$

<u>3-й закон:</u> *тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю, противоположными по направлению и приложенными соответственно к взаимодействующим телам.*

В инерциальных системах отсчёта все силы обусловлены только взаимодействием тел, эти силы возникают парами и к ним применим 3-й закон Ньютона.

Формулу, выражающую 2-й закон Ньютона, можно записать более удобно: $\vec{F} = m\vec{a}.$ Однако такую запись не следует трактовать как равенство двух сил $\vec{F}$ и $m\vec{a}.$ Это есть выражение равнодействующей силы $\vec{F}$ через массу тела и вызванное этой силой ускорение. В динамике взаимодействия тел считаются заданными, поэтому выражения для сил, входящих в законы динамики, должны быть взяты из других разделов физики, где изучается их природа.

Во многих задачах приходится рассматривать трение тел друг о друга. При наличии трения силу $\vec{R}$, с которой одно тело действует на другое, удобно рассматривать как векторную сумму двух сил (рис. 6): силы $\vec{N}$, направленной перпендикулярно к поверхности контакта (это – *сила нормального давления* или *сила нормальной реакции опоры)*, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной по касательной к поверхности контакта.

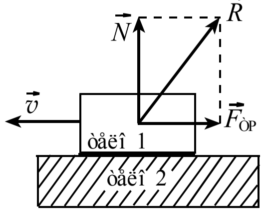

Рис. 6

Удобство заключается в том, что при скольжении тел относительно друг друга модули этих составляющих связаны между собой законом Кулона-Амонтона, установленным экспериментально:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (9)$$

Коэффициент трения скольжения μ зависит от рода соприкасающихся поверхностей. Обычно пренебрегают слабой зависимостью силы трения от площади контакта и от величины относительной скорости v тел.

Для трения покоя закон (9) не применим, т.к. при постоянной N модуль силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, обычно несколько превышающего силу трения скольжения для этих поверхностей (так называемое *явление застоя).* Но для простоты максимальное значение силы трения покоя также принимают равным μN.

Если тело может катиться по той или иной поверхности, то из-за деформации материала этой поверхности перед катящимся телом возникает *сила трения качения,* которая обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. Обычно сила трения качения гораздо меньше силы трения скольжения и ею, поэтому, пренебрегают.

При движении твёрдого тела в жидкости или газе возникает *сила сопротивления,* зависящая от скорости движения тела относительно среды (жидкости, газа). Эта сила может быть прямо пропорциональна как самой указанной скорости, так и квадрату скорости. При этом «сопротивление покоя», аналогичное трению покоя, отсутствует.

При решении задач следует также иметь в виду, что основное уравнение динамики, выражающее 2-й закон Ньютона, является векторным уравнением. Однако часто бывает так, что силы, действующие на то или иное тело, лежат в одной плоскости. Тогда можно выбрать систему отсчёта, оси Ox и Oy которой лежали бы в плоскости действия сил, и указанное векторное уравнение сводилось бы к двум скалярным (в проекциях на выбранные оси).

ЗАДАЧА 3. Два груза массами m_1 и m_2 подвешены на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок. Определите ускорения грузов в процессе их движения. Трением в блоке пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Для описания движения системы здесь будет достаточно одной координатной оси Oy, которую направим вертикально вниз. Пусть груз m_1 движется вниз с ускорением $\vec{a}_1$, а груз m_2 – вверх с ускорением $\vec{a}_2$ (рис. 7). На каждый из грузов действуют сила тяжести и сила натяжения нити, изображённые на рисунке. Запишем уравнение 2-го закона Ньютона в проекциях на ось Oy для каждого груза:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1;$$

$$-m_2 a_2 = m_2 g - T_2.$$

Поскольку нить и блок невесомы, то $T_1 = T_2$. Из нерастяжимости нити следует равенство модулей ускорений грузов: $a_1 = a_2$. Решая полученные уравнения с учётом двух последних равенств, найдём:

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

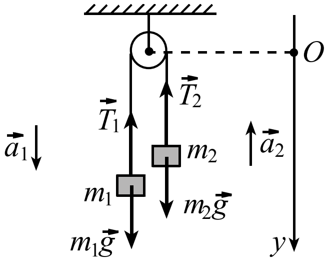

Рис. 7

Если $m_1 < m_2$, то направления ускорений грузов будут противоположными тем, которые мы выбрали изначально на рис. 7.

*** ЗАДАЧА 4.** Доску с находящимся на ней бруском удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60^\circ$ (рис. 8а). Расстояние от бруска до края доски $S = 49$ см. Доску и брусок одновременно отпускают, и доска начинает скользить по наклонной плоскости, а брусок – по доске. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской $\mu_1 = 0,3$, а между доской и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0,4$. Масса доски в три раза больше массы бруска. 1) Определить ускорение бруска относительно наклонной плоскости при скольжении бруска по доске. 2) Через какое время брусок достигнет края доски? (МФТИ, 2001г.)

РЕШЕНИЕ. Выберем систему координат и изобразим силы, действующие на брусок и доску, на рис. 8б. Заметим, что сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр1}$ действуют на брусок массой m и обусловлены его взаимодействием с доской массой $3m$. По третьему закону Ньютона такие же по модулю, но противоположно направленные *им силы* $\vec{N}_1'$ и

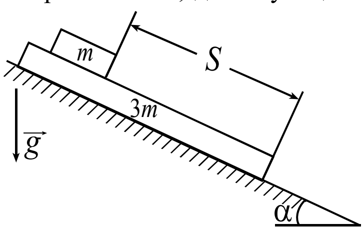

Рис. 8а

$\vec{F}'_{тр1}$ действуют со стороны бруска на доску. Точки их приложения к доске на рис. 8б пространственно разнесены по соображениям удобства восприятия чертежа. Смысл остальных сил ясен из их обозначений.

Пусть $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – ускорения бруска и доски соответственно относительно наклонной плоскости. Тогда по второму закону Ньютона в проекциях на оси Ox и Oy можно записать для бруска:

$$\begin{cases} ma_1 = mgsin\alpha - F_{\text{тр}1}, \\ 0 = N_1 - mgcos\alpha, \end{cases}$$

для доски:

$$\begin{cases} 3ma_2 = 3mgsin\alpha + F'_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2}, \\ 0 = N_2 - N'_1 - 3mgcos\alpha. \end{cases}$$

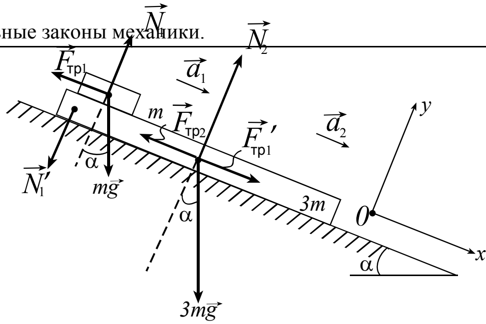

Рис. 8б

К этим уравнениям необходимо добавить выражения для сил трения:

$$F_{\text{тр}1} = F'_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1, \qquad F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2.$$

Решая совместно записанные уравнения, находим

$$a_1 = g\left(sin\alpha - \mu_1 cos\alpha\right) \approx 7 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = \frac{1}{3} g\left(3sin\alpha + \left(\mu_1 - 4\mu_2\right) cos\alpha\right) \approx 6,4 \text{ м/с}^2.$$

Видим, что движется по наклонной плоскости с ускорением, меньшим, чем у бруска. Заметим, что движение доски не влияет на ускорение a_1. Это связано с тем, что и при движущейся, и при закреплённой доске сила трения $F_{òð1}$ между бруском и доской одна и та же.

Пусть брусок достиг края доски через время t ñ момента начала движения. За это время брусок и доска пройдут относительно наклонной плоскости пути $S_1 = \dfrac{a_1 t^2}{2}$ и $S_2 = \dfrac{a_2 t^2}{2}$ соответственно (это – кинематические соотношения). Их разность $S_1 - S_2$ будет равна пути, пройденному бруском по доске, то есть – начальному расстоянию S от бруска до края доски.

Тогда $S = S_1 - S_2 = \dfrac{a_1 - a_2}{2} \cdot t^2$, *откуда* $t = \sqrt{\dfrac{2S}{a_1 - a_2}}$ $\cdot$ *С учётом выражений для* a_1 *и* a_2 *получим* $t = \sqrt{\dfrac{3S}{2\left(\mu_2 - \mu_1\right) gcos\alpha}} \approx 1,2$ с.

Ответ: 1) $a_1 \approx 7 \text{ м/с}^2$; 2) $t \approx 1,2$ с.

ЗАДАЧА 5. С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью $u = 9,8$ м/с под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту. Модуль вертикальной составляющей скорости в точке бросания был на 20% больше, чем в точке падения. Найти время полёта мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча со стороны воздуха прямо пропорциональна его скорости.
(МФТИ, 1989 г.)

РЕШЕНИЕ. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости $\vec{v}$ мяча и равна $-k\vec{v}$, где k – коэффициент пропорциональности. Разобьем время t полёта мяча на сколь угодно малые интервалы времени Δt_i. Для произвольно взятого интервала времени Δt_i обозначим средний вектор скорости мяча на этом интервале через $\vec{v}_i$ (рис. 9) и запишем уравнение второго закона Ньютона

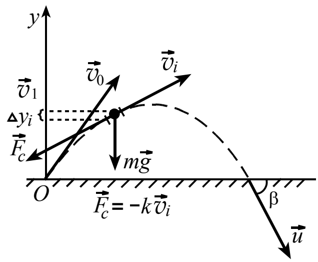

Рис. 9

для движения мяча: $m\vec{g} - k\vec{v}_i = m\dfrac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t_i}$,

где m – масса мяча, $\Delta\vec{v}_i$ – изменение скорости мяча за время Δt_i. Здесь мы воспользовались определением ускорения $\vec{a}_i = \Delta\vec{v}_i / \Delta t_i$.

Спроецируем написанное уравнение на ось Oy, направленную вертикально вверх и умножим обе части уравнения на Δt_i.

Тогда $-mg \cdot \Delta t_i - kv_{iy} \cdot \Delta t_i = m \cdot \Delta v_{iy}$,

где v_{iy} и Δv_{iy} – проекции на ось Oy скорости и изменения скорости мяча соответственно. Заметим, что за интервал времени Δt_i изменение вертикальной координаты мяча $\Delta y_i = v_{iy} \cdot \Delta t_i$. С учётом этого получаем: $-mg \cdot \Delta t_i - k \cdot \Delta y_i = m \cdot \Delta v_{iy}$. Аналогичные уравнения будут справедливы для любого интервала Δt_i. Если сложить эти уравнения для всех интервалов времени Δt_i, получим

$$-mg \cdot t - k \cdot \Delta y = m \cdot \Delta v_y. \qquad (*)$$

Здесь Δy и Δv_y – изменение координаты мяча по оси Oy и изменение проекции на ось Oy скорости мяча за всё время полёта t. В нашей задаче $\Delta y = 0$ (камень был брошен с земли и упал на землю, т.е. конечная и начальная координаты мяча одинаковы), а $\Delta v_y = u_y - v_{0y} = -u\sin\beta - 1,2u\sin\beta = -2,2u\sin\beta$. С учётом этого из уравнения (*) находим

$$t = 2,2\frac{u}{g}\sin\beta \approx 1,1\text{с}. \quad *$$

ЗАДАЧА 6. Санки скользят по ледяной горке, имеющей форму дуги окружности (рис. 10а). В некоторой точке A, определяемой углом α, сила нормального давления санок на горку численно равна силе тяжести санок. Определить ускорение санок в точке A. Трением и размерами санок пренебречь.

РЕШЕНИЕ. По условию задачи сила $\vec{N'}$, с которой санки давят на горку в точке A численно равна силе тяжести, действующей на санки. По третьему закону Ньютона горка действует на санки с такой же по величине силой. В нашем случае это – сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 10б). Итак, $N = N' = mg$.

Полное ускорение санок $\vec{a}$ в т. A складывается из тангенциальной $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющих. С учётом этого запишем уравнение второго закона Ньютона для движения санок в проекциях на взаимно перпендикулярные направления $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$:

$$ma_\tau = mg\sin\alpha; \quad ma_n = N - mg\cos\alpha.$$

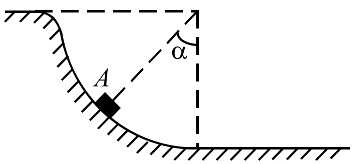

Рис.10а

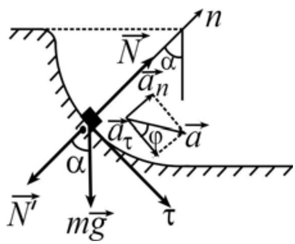

Рис. 10б

Отсюда находим $a_\tau = g\sin\alpha$, $a_n = g(1-\cos\alpha)$. Здесь мы учли, что $N = mg$. Тогда модуль ускорения санок равен

$$a = \sqrt{a_\tau^{\,2} + a_n^2} = g\sqrt{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2} = g\sqrt{2(1-\cos\alpha)}.$$

Направление вектора $\vec{a}$ определим с помощью угла φ, который вектор $\vec{a}$ составляет с направлением $\vec{\tau}: tg\varphi = \dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.