В предлагаемом Задании основное внимание будет уделено примерам решения задач по темам различных разделов механики. Для успешной работы над ним Вам будет полезно использование соответствующего материала школьных учебников по физике.

§1. Кинематика

В *кинематике* устанавливаются математические соотношения между различными характеристиками механического движения, такими как перемещение, пройденный путь, скорость, ускорение, время движения. При этом механическое движение рассматривается без выяснения причин, его вызывающих.

Пространственное положение тела (материальной точки) определяется с помощью её *радиус-вектора* $\vec{r}$ или, что равносильно, совокупности трех чисел x, y и z, представляющих собой проекции радиус-вектора на соответствующие оси декартовой системы координат. *Движение тела определено, если известна зависимость радиус-вектора от времени* $\vec{r}\left(t\right)$, или *известны скалярные функции* $x(t)$, $y(t)$ *и* $z(t)$.

Для равномерного прямолинейного движения, т.е. для движения с постоянной скоростью $\vec{v} = const$, функция $\vec{r}(t)$ имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \qquad (1)$$

для равнопеременного движения с постоянным ускорением $\vec{a} = const$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \qquad (2)$$

В этих формулах $\vec{r}_0$ характеризует начальное положение тела и представляет собой его радиус-вектор в начальный момент времени $t = 0$, соответственно $\vec{v}_0$ – начальная скорость тела при $t = 0$.

Зависимость *мгновенной скорости* $\vec{v}$ (или просто *скорости* $\vec{v}$) тела от времени t при равнопеременном движении получается путём дифференцирования (2) по времени и имеет вид:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \qquad (3)$$

Часто в процессе решения задач для удобства приходится переходить от одной системы отсчёта (условно назовем её неподвижной) к другой системе отсчёта, движущейся определённым образом относительно первой. В этих случаях необходимо знать так называемые формулы преобразования радиусов-векторов, скоростей и ускорений тел в различных системах отсчёта. Так *если одна система отсчёта движется поступательно относительно другой, условно неподвижной, то справедливы следующие соотношения* для указанных величин

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}',$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ – радиусы-векторы материальной точки соответственно в неподвижной и движущейся системах отсчёта, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начала координат (точки O') движущейся системы отсчёта в неподвижной системе отсчёта. Аналогичные обозначения использованы в приведённых формулах для скоростей и ускорений материальной точки.

Из последней формулы вытекает важное следствие, а именно, при $\vec{a}_0 = 0,$ когда скорость поступательно движущейся системы отсчёта постоянна, ускорения материальной точки в неподвижной и движущейся системах отсчёта одинаковы.

При решении задач бывает удобно записывать векторные кинематические уравнения в проекциях на оси координат. В случаях, когда траектория тела лежит в одной плоскости, можно ограничиться двумя координатными осями Ox и Oy, так чтобы исходные векторные уравнения сводились к двум скалярным. Для этого нужно всего лишь совместить плоскость xOy с плоскостью траектории тела. Так, например, векторные уравнения (2) и (3) будут соответственно эквивалентны системам скалярных уравнений (4) и (5):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}, \end{cases} \qquad (4) \qquad\qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь $x(t), y(t); x_0, y_0; v_{0x}, v_{0y}; v_x, v_y; a_x, a_y$ – проекции на оси Ox и Oy векторов $\vec{r}(t)$; $\vec{r}_0$; $\vec{v}_0$; $\vec{v}$ и $\vec{a}$ соответственно.

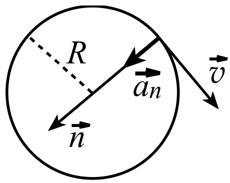

Рис. 1

При равномерном движении тела по окружности вектор скорости изменяется только по направлению, оставаясь неизменным по модулю и направленным по касательной к окружности. При этом вектор ускорения направлен к центру окружности перпендикулярно вектору скорости, т. е. по нормали n к траектории (рис. 1). Такое ускорение часто называют *центростремительным* или *нормальным,* его модуль равен

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (6)$$

где R – радиус окружности. Эта же формула справедлива и при движении тела с постоянной по модулю скоростью v по произвольной криволинейной траектории. В этом случае R есть радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. Вектор ускорения $\vec{a}_n$ направлен к центру кривизны перпендикулярно вектору скорости и характеризует изменение скорости по направлению.

Если же скорость изменяется не только по направлению, но и по модулю, то у вектора ускорения $\vec{a}$ кроме нормальной составляющей (6), будет ещё так называемая тангенциальная составляющая $\vec{a}_\tau$, направленная по касательной τ к траектории в данной точке (рис. 2) в сторону вектора скорости или против него в зависимости от того, увеличивается или уменьшается модуль скорости тела. Модуль полного ускорения $\vec{a}$ по теореме Пифагора будет равен $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$.

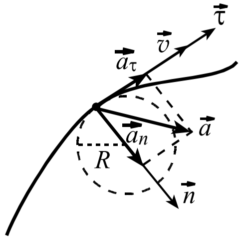

Рис. 2

Решение кинематических задач сводится к использованию указанных выше формул и уравнений в конкретных сформулированных условиях.

ЗАДАЧА 1. Необходимо переправиться через реку шириной H. Под каким углом α к течению должна плыть лодка, чтобы переправиться на противоположный берег за минимальное время? Где окажется лодка, переплыв реку? Какой путь S она пройдёт, если скорость течения реки постоянная и равна $\vec{v}_1$, а скорость лодки относительно воды постоянна и равна $\vec{v}_2$?

РЕШЕНИЕ. Поместим начало O неподвижной системы отсчёта в то место, где лодка отчаливает от берега. Оси координат направим так, как показано на рис. 3. При таком выборе системы отсчёта начальные координаты лодки равны нулю:

$$x_0=0,\ y_0=0.$$

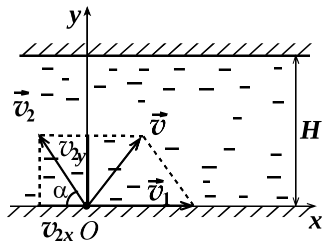

Рис. 3

Скорость лодки $\vec{v}$ в выбранной системе отсчёта равна векторной сумме скорости течения $\vec{v}_1$ и скорости лодки относительно воды $\vec{v}_2$, то есть $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$. Предположим, что вектор $\vec{v}_2$ составляет с берегом угол α. Поскольку лодка движется прямолинейно и равномерно, то, записав уравнение (1) в проекциях на оси координат, получим:

$$\begin{cases} x=(v_1-v_2\cos\alpha)\cdot t,\\ y=(v_2\sin\alpha)\cdot t. \end{cases}$$

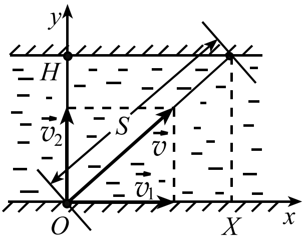

Рис. 4

Время t_n, необходимое для переправы через реку, находим из последнего уравнения при условии $y = H$, а именно $t_n = \dfrac{H}{v_2 \sin\alpha}$. Значение t_n будет минимальным, если $\sin\alpha$ максимален, т.е. при $\alpha = \pi/2$. Отсюда $t_{\min} = \dfrac{H}{v_2}$. Этот случай показан на рис. 4. При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ уравнение для x принимает вид: $x = v_1 t$. Поэтому, когда лодка окажется на другом берегу, смещение X вдоль оси Ox будет равно $X = v_1 t_{\min} = \dfrac{v_1}{v_2}$H.

Длину S пройденного лодкой пути найдём по теореме Пифагора:

$$S = \sqrt{X^2 + H^2} = \frac{H}{v_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

ЗАДАЧА 2. Тело бросают с поверхности земли, сообщив ему начальную скорость $\vec{v}_0$, направленную под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите нормальную и тангенциальную составляющие ускорения тела на высоте h, когда тело ещё не достигло наивысшей точки траектории. Найдите, также, время t_n подъёма тела на высоту h и горизонтальную проекцию l перемещения тела в этот момент времени.

РЕШЕНИЕ. Направим оси декартовой прямоугольной системы координат так, как показано на рис. 5. Начало отсчёта O поместим в точку бросания. Запишем начальные условия движения тела: $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ v_{0x} = v_0 \cos\alpha,\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$ При отсутствии сопротивления воздуха тело движется с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Проекции ускорения тела на оси координат, поэтому, равны: $a_x = 0, a_y = -g$. С учётом сказанного, кинематические уравнения равнопеременного движения (4) и (5) в нашем случае принимают вид

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases} \qquad (7) \qquad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha, \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \end{cases} \qquad (8)$$

Пусть при $t = t_n$ тело достигло высоты h, тогда $y = h, x = l.$ В этом случае уравнения системы (7) дают:

$$l=(v_0\cos\alpha)t_n,\quad h=(v_0\sin\alpha)t_n-\frac{gt_n^2}{2}.$$

Из последнего уравнения находим

$$t_n=\frac{1}{g}\left(v_0\sin\alpha-\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha-2gh}\right).$$

Второе значение t_n со знаком «+» перед квадратным корнем соответствует случаю, когда тело «перевалило» за наивысшую точку траектории и вновь оказалось на высоте h над землей. Этот случай по условию задачи нас не интересует.

В момент времени $t=t_n$ *проекция* l *перемещения тела* равна

$$l=(v_0\cos\alpha)t_n=\frac{v_0\cos\alpha}{g}\cdot\left(v_0\sin\alpha-\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha-2gh}\right).$$

Модули нормальной и тангенциальной составляющих ускорения тела будут соответственно равны

$$a_n=g\cos\beta,\ a_\tau=-g\sin\beta,$$

где β – угол, который составляет с горизонтом (осью Ox) вектор $\vec{v}$ скорости тела в момент времени $t=t_n$ (рис. 5). Угол β легко определить, записав уравнения системы (8) при $t=t_n$, а именно

$v\cos\beta=v_0\cos\alpha,$

$v\sin\beta=v_0\sin\alpha-gt_n.$ Действительно, $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2-2gh}$

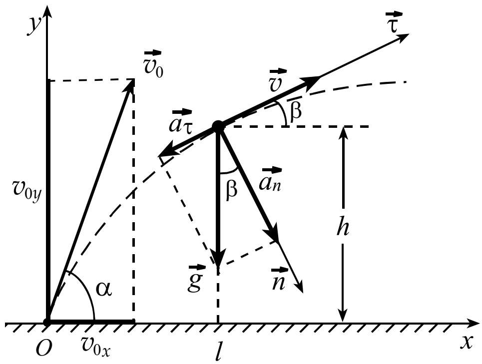

Рис. 5

и $\cos\beta=\dfrac{v_0\cos\alpha}{v}$. Отсюда $\beta=\arccos\left(\dfrac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2-2gh}}\right)$.