## §6. Симметрические системы

Функция $f(x,y)$ называется симметрической, если $f(x,y)=f(y,x)$.

Система уравнений вида $\begin{cases} f(x,y)=a \\ g(x,y)=b \end{cases}$, где $f(x,y), g(x,y)$ – симметрические, называется симметрической системой. Такие системы решаются чаще всего с помощью введения новых переменных $x+y=u,\ xy=v.$

**Пример 21.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

♦ Эта алгебраическая (симметрическая) система, обычно она решается заменой $x+y=u,\ \ xy=v.$ Заметив, что

$$x^3+x^3y^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+x^3y^3=$$
$$=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)+x^3y^3=u\left(u^2-3v\right)+v^3,$$

перепишем систему в виде

$$\begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v, \\ v^2-5v+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=2, u=3, \\ v=3, u=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

(в старых переменных)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y, \\ y^2-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing. \\ \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y, \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1, \\ x=1, y=2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Ответ:** $(2;1),\ (1;2).$ ♦