§2. Иррациональные неравенства

Иррациональными называют неравенства, в которых переменные входят под знаком корня. Так как корень чётной степени существует только у неотрицательных чисел, то при решении неравенств, содержащих такое выражение, прежде всего удобно найти ОДЗ.

Пример 3. (МГУ, 1998) Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$.

♦ Это неравенство можно решить несколькими способами. Решим его графически (рис. 1). Построим графики функций $y=\sqrt{x+3}$, $y=x+1$ и посмотрим, где первый график расположен выше второго. Для нахождения решения останется решить

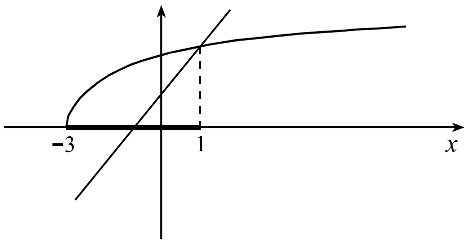

Рис. 1

только уравнение $\sqrt{x+3}=x+1$ (и не надо рассматривать случаи разных знаков для $x+1$!).

$$\sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0, \\ x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow x\in[-3;1).$$

Ответ: $[-3;1)$. ♦

Сначала приведём уже выведенные в 10-ом классе условия равносильности для уравнений (в частности, для того, чтобы была понятна приведённая уже здесь нумерация условий равносильности для корней (УР К)):

$$\sqrt{f(x)}=a^2 \Leftrightarrow f(x)=a^4. \qquad \text{(УР К 1)}$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases} \qquad \text{(УР К 2)}$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x). \qquad \text{(УР К 3)}$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ \left[\begin{array}{l} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{array}\right. \end{cases} \qquad \text{(УР К 4)}$$

п.1. Неравенства вида $\sqrt{f(x)}\ge g(x)$ и $\sqrt{f(x)}\le g(x)$.

ОДЗ: $f(x)\ge 0$.

Рассмотрим неравенство $\sqrt{f(x)}\ge g(x)$. Докажем, что

$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$	(УР К5)

1. Если x является решением неравенства $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, то $f(x) \geq 0$ и $\sqrt{f(x)}$ существует. При этом неравенство заведомо выполнено при $g(x) < 0$. Если же $g(x) \geq 0$, то возведение в квадрат обеих частей неравенства приводит к равносильному неравенству $f^2(x) \geq g^2(x)$.

2. Пусть теперь x является решением совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Тогда: а) если $g(x) < 0$ и $f(x) \geq 0$, то существует $\sqrt{f(x)}$ и заведомо выполнено неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$;

б)если $g(x) \geq 0$ и $f(x) - g^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} - g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)} + g(x)\right) \geq 0$,

то $f(x) - g^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} - g(x) \geq 0$.

Можно ОДЗ неравенства найти отдельно, тогда условие равносильности примет вид:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} g(x) < 0; \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{(УР К6)}$$

Теперь рассмотрим неравенство *вида*

	$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$.	

Докажем, что

	$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$	(УР К7)

1. Если x является решением неравенства $\sqrt{f(x)} \le g(x)$, то $f(x) \ge 0$ и существует $\sqrt{f(x)}$, а тогда $g(x) \ge 0$, и возведение в квадрат обеих частей неравенства приводит к равносильному неравенству $f(x) \le g^2(x)$.

2. Если x является решением системы неравенств $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \end{cases}$ то $f(x) \ge 0$ и существует $\sqrt{f(x)}$, а тогда $f(x) - g^2(x) \le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} - g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)} + g(x)\right) \le 0$. Но, по условию, $g(x) \ge 0$, поэтому $f(x) - g^2(x) \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} - g(x) \le 0$.

Пример 4. (МФТИ, 1998) Решите неравенство $3\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > 1 - 2x$.

♦ ***Первый способ***

Воспользуемся (УР К6):

$$3\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > 1 - 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - 2x < 0, \\ 3x^2 - 8x - 3 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 2x \ge 0, \\ 9\left(3x^2 - 8x - 3\right) > (1 - 2x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0,5, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-1}{3}\right] \cup [3; +\infty); \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0,5, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{34 - 30\sqrt{2}}{23}\right) \cup \left(\dfrac{34 + 30\sqrt{2}}{23}; +\infty\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [3; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{34 - 30\sqrt{2}}{23}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3;+\infty)$. **Ответ:** $\left(-\infty; \dfrac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3;+\infty)$.

Второй способ

Можно оформить решение неравенства и несколько по – другому. Найдем сначала ОДЗ:

$$3x^2-8x-3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [3;+\infty).$$

Теперь неравенство перепишем в виде $3\sqrt{3x^2-8x-3}-(1-2x)>0$.

1. Если $1-2x<0$, т. е. $x>\dfrac{1}{2}$, то неравенство выполнено в ОДЗ, т. е. $x \in [3;+\infty)$.

2. Если $1-2x \geq 0$, т. е. $x \leq \dfrac{1}{2}$, то

$$3\sqrt{3x^2-8x-3} > 1-2x \Leftrightarrow 9\left(3x^2-8x-3\right) > 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23x^2-68x-28>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup \left(\frac{34+30\sqrt{2}}{23};+\infty\right)$$

.Заметим, что ОДЗ в этом случае выполнилось *автоматически.*

Учтем, что $x \leq \dfrac{1}{2}$ – тогда $x \in \left(-\infty; \dfrac{34-30\sqrt{2}}{23}\right)$.

Объединяя 1 и 2, получаем **Ответ:** $\left(-\infty; \dfrac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3;+\infty)$. ♦

п.2. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

Рассмотрим неравенство *вида* $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

Докажем, что

	$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	(УР К8)

1. Если $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$, то $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ и $f(x) \leq g(x)$, т. е. x является решением системы неравенств $\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

2. Если x является решением системы неравенств $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge 0, \end{cases}$ то $f(x) \ge 0,\quad g(x) \ge 0,\quad \sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{g(x)}$ существуют. При этом $f(x) \le g(x) \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$, т. е. неравенство выполнено.

Замечание. Для строгих неравенств в условиях равносильности надо просто заменить значок $\ge$ или $\le$ на $>$ или $<$ соответственно.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{2x+1} \le \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$.

♦ $\sqrt{2x+1} \le \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \le x^3 - 4x^2 + x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-1;1] \cup [4;+\infty), \\ x \ge -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2};1\right] \cup [4;+\infty).$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};1\right] \cup [4;+\infty)$. ♦

п.3. Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \le 0$.

Роль сопряжённых выражений

Обычно при решении неравенств, имеющих ОДЗ, надо сначала найти ОДЗ. При нахождении ОДЗ такого сложного неравенства, как $\dfrac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \ge 0$, учителя и школьники обычно решают систему $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ h(x) \ne 0 \end{cases}$. Затем школьники иногда ошибочно опускают знаменатель и решают неравенство $\sqrt{f(x)} - g(x) \ge 0$.

Мы в ОДЗ *дроби не будем* записывать условие $h(x) \ne 0$ и тем более не будем тратить время и силы на решение этого неравенства. Оправдывается это тем, что в дальнейшем используем только *классический* метод интервалов для рациональных функций, в котором условие $h(x) \ne 0$ автоматически выполняется, ибо нули знаменателя наносятся на числовую ось *кружочками* («дырками»), т. е. ограничение $h(x) \neq 0$ *заложено в самом методе*. Это ОДЗ, которое отличается от привычного школьного $\left(\text{с } h(x) \neq 0\right)$, по предложению самих учителей, будем обозначать не ОДЗ, а ОДЗ*. Итак, например, для неравенств вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)} \geq 0$ будем искать ОДЗ*: $f(x) \geq 0$.

Рассмотрим довольно часто встречающееся неравенство вида

	$\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)} \geq 0\,(\leq 0).$	

В методической литературе предлагается рассмотреть две системы в зависимости от знака знаменателя $h(x)$, причём в каждой есть неравенство с корнем. Энтузиазм решать задачу при этом быстро «испаряется».

Мы поступим *иначе:* рассмотрим два случая в зависимости не от знака $h(x)$, а от *знака* $g(x)$, и неравенств с корнем решать *не придётся*.

Рассмотрим отдельно *разность* $\sqrt{f(x)}-g(x)$. Отметим две особенности поведения этой разности:

1) если $g(x)<0$, то разность $\sqrt{f(x)}-g(x)$ положительна в ОДЗ;

2) если $g(x) \geq 0$, то разность $\sqrt{f(x)}-g(x)$ может быть как положительной, так и отрицательной в ОДЗ. Заметим, однако, что в этом случае сумма $\sqrt{f(x)}+g(x)$ всегда неотрицательна в ОДЗ, а умножение разности $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)$ на неотрицательное выражение $\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)$ не изменит знака разности, т.е. выражение $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right) \equiv f(x)-g^2(x)$ имеет тот же знак, что и $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)$ в ОДЗ. Новое выражение уже не содержит радикалов (корней), а выражение $\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)$ называется сопряжённым для $\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)$ выражением. Отсюда следует важное правило **ПК1**:

Если $g(x) \geq 0$, то знак разности $\sqrt{f(x)}-g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x)-g^2(x)$ в ОДЗ.	(П К1)

Теперь используем эти свойства для решения довольно сложных неравенств вида

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\ge 0 \text{ или } \left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)h(x)\ge 0.}$$

Сейчас мы покажем, что можно обойтись, хотя и двумя случаями, но без корней.

Рассмотрим, для определённости, неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\ge 0.$

1. Мы уже заметили, что, если $g(x)<0,$ то числитель положителен в ОДЗ. Но тогда $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\ge 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} h(x)>0.$

2. Если же $g(x)\ge 0,$ то разность может менять знак в зависимости от значений $x,$ но сумма $\sqrt{f(x)}+g(x)$ всегда неотрицательна в ОДЗ, и умножение обеих частей неравенства на это *сопряжённое* выражение приводит к равносильному неравенству, т. е. в этом случае $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\ge 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}\ge 0.$ Для неравенства другого знака меняется лишь знак неравенства. Объединив оба условия, получаем новое замечательное условие равносильности в ОДЗ:

$\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\ge 0\ (\le 0) \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x)<0, \\ h(x)>0\ (<0), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}\ge 0\ (\le 0). \end{cases}\end{array}\right.$	(УРК16)

Найденные в результате исследования совокупности (УР К9) решения следует сравнить с ОДЗ.

Пример 6. (МГУ, 1995) Решите неравенство $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0.$

♦ ОДЗ*. $4x+15\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{15}{4}.$ Теперь в ОДЗ преобразуем неравенство: $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}=\dfrac{\left(\sqrt{4x+15}+2x\right)\left(\sqrt{4x+15}-2x\right)}{\sqrt{4x+15}+2x}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+15}-2x\geq 0, \\ \sqrt{4x+15}+2x\neq 0. \end{cases}$$

Попробуем решить эту систему графически.

Из графика на рис. 2 видно, что неравенство выполнено от точки $x=-\dfrac{15}{4}$ до абсциссы точки пересечения кривой $y=\sqrt{4x+15}$ и прямой $y=2x$.

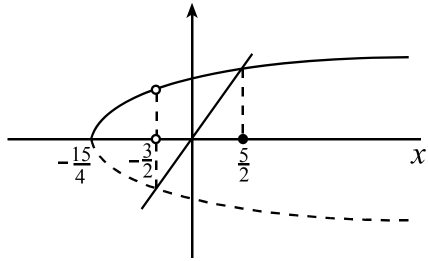

Рис. 2

Найдем эту абсциссу:

$$\sqrt{4x+15}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq 0, \\ 4x+15=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}, \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Заметим, что для решения уравнения мы возводили обе части в квадрат, а, значит, одновременно с нашим решили «чужое» уравнение:

$$\sqrt{4x+15}+2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+15}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\leq 0, \\ 4x+15=4x^2. \end{cases}$$

А в нашей системе решение этого уравнения $x=-\dfrac{3}{2}$ как раз нам надо исключить. Главное в том, что для решения **всей** системы оказалось достаточно решить **единственное уравнение**

$$4x+15=4x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}, \\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Теперь можно записать **Ответ:** $x\in\left[-\dfrac{15}{4};-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right].$ ♦

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$.

► Найдём сначала ОДЗ*: $2-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 2$. Теперь воспользуемся (УР К9):

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2-x}+(2x-3)}{x}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2-x}-(3-2x)}{x}\ge 0\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-2x<0,\\ x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}3-2x\ge 0,\\ \dfrac{2-x-(2x-3)^2}{x}\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3}{2},\\ \begin{cases}x\le\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{4x^2-11x+7}{x}\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3}{2},\\ \begin{cases}x\le\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{\left(x-\dfrac{7}{4}\right)(x-1)}{x}\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3}{2},\\ x\in(-\infty;\,0)\cup\left[1;\,\dfrac{3}{2}\right]\end{array}\right.\overset{с\ учетом\ ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}x\in(-\infty;0)\cup[1;\,2].$$

Систему неравенств $\begin{cases}x\le\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{\left(x-\dfrac{7}{4}\right)(x-1)}{x}\le 0\end{cases}$ решили классическим методом интервалов – рис. 3.

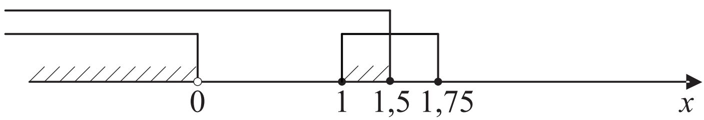

Рис. 3

Ответ: $(-\infty;\,0)\cup[1;\,2]$. ◄

Пример 8. $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0.$

► Неравенство довольно громоздкое и сложное.

Найдём сначала ОДЗ*: $x^2-4x+3\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,1]\cup[3;\,+\infty)$. Затем рассмотрим *отдельно* два случая в зависимости от знака $(x+7)$.

1. Если $x+7<0 \Leftrightarrow x<-7,$ то числитель положителен в ОДЗ* и

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0 \overset{ОДЗ*}{\Leftrightarrow} x^2-x-72<0 \Leftrightarrow (x+8)(x-9)<0 \Leftrightarrow$$

$x\in(-8;\,9)$. Учитывая ограничение $x<-7,$ получаем, что $x\in(-8;\,-7)$. Оказалось, что этот промежуток принадлежит ОДЗ*.

2. Если $x+7\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -7,$ то воспользуемся правилом П К1. Тогда

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-2(x+7)}{x^2-x-72}\le 0 \overset{ОДЗ*}{\Leftrightarrow} \frac{\left(x^2-4x+3\right)-\left(2(x+7)\right)^2}{(x-9)(x+8)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+60x+193}{(x+8)(x-9)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\dfrac{-30-\sqrt{321}}{3}\right)\left(x-\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right)}{(x+8)(x-9)}\ge 0 \overset{x\ge -7}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow \left[-7;\,\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;\,+\infty)$ с учётом ограничения $x\ge -7$. Оказалось, что и эти промежутки принадлежат ОДЗ*. Поэтому

$$x\in\left(-8;\,\frac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;\,+\infty).$$

Ответ: $\left(-8;\,\dfrac{-30+\sqrt{321}}{3}\right]\cup(9;\,+\infty)$. ◄

п.4. Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0\,(\le 0)$.

Роль сопряжённых выражений

Теперь рассмотрим неравенство вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0\,(\le 0)$.

На вид довольно сложное неравенство. Разность $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ где-то на числовой оси положительна, где-то отрицательна, но *сумма* корней

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ всегда неотрицательна в ОДЗ. Поэтому умножение обеих частей неравенства на это *сопряжённое* выражение приводит к равносильному в ОДЗ неравенству, и имеет место условие равносильности в ОДЗ

$\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}\ge 0$	(УР К10),

или полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0, \\ \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}\ge 0 \end{cases}$	(УР К11)

Отсюда, в частности, следует полезное правило (П К2):

Знак разности $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$ в ОДЗ. (П К2)

Пример 9. (Демоверсия ЕГЭ - 2010) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1}\le x.$$

и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения

►Замечательный пример на применение (УР К11)!

Приведём всё к общему знаменателю, затем разложим разность кубов на множители. При этом учтём, что неполный квадрат суммы x^2+x+1никогда в 0 не обращается – он всегда положителен, потому что его дискриминант отрицателен. Поэтому на $\sqrt{x^2+x+1}$ можно сократить. Затем воспользуемся (УР К11), или, что то же, тем, что умножение неравенства на *положительное сопряжённое* выражение приводит к равносильному неравенству. Тогда

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\le x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^3}-1-x-x^2}{1+x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1+x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}}{1+x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{1+x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0, \\ \dfrac{(1-x)-\left(x^2+x+1\right)}{1+x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ \dfrac{x(x+2)}{1+x} \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-2;\,-1) \cup [0;\,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;\,-1) \cup [0;\,1].$$

Неравенство решено методом интервалов – рис. 4.

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения, равна 3.

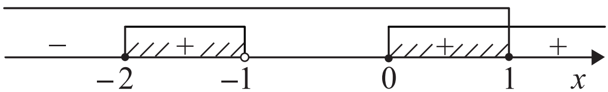

Рис. 4

Ответ: $[-2;\,-1) \cup [0;\,1]$, 3. ◄

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \le 0$ и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения.

► Найдём сначала ОДЗ*: $\begin{cases} 4x^2-3x+2 \ge 0, \\ 4x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{3}{4}$.

Теперь можно решить неравенство, применив правило (П К2) :

$$\frac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6} \le 0 \overset{ОДЗ*}{\Leftrightarrow} \frac{4x^2-3x+2-4x+3}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x^2-7x+5}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow x \in (2;3)$. Промежуток принадлежит ОДЗ*. Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения, равна 1. **Ответ.** $(2;\,3)$, 1. ◄

п.5. Нестрогое неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \ge 0 (\le 0)$.

Воспользуемся определением нестрогого неравенства и особенностью иррациональных неравенств.

Получим

$$\boxed{\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \geq 0\,(\leq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0\,(<0). \end{cases} \end{array}\right.} \qquad \text{(УР10)}$$

Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \leq 0.$

♦ Воспользуемся (УР10):

$$\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-x-x^2=0, \\ x^2-1\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x-x^2>0, \\ x^2-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2; \\ \begin{cases} x\in(-3;2), \\ x\in(-1;1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-3\}\cup(-1;1)\cup\{2\}.$$

Ответ: $\{-3\}\cup(-1;1)\cup\{2\}$. ♦