

**Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)**

ФИЗИКА

**Физическая оптика.
Элементы квантовой физики**

Задание №6 для 11-х классов

(2009-2010 учебный год)



г. Долгопрудный, 2010

Составитель: В.П. Слободянин, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задания №6 для 11-х классов (2009-2010 учебный год). - М.: МФТИ, 2010, 32с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 28 апреля 2010г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и требуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звездочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Слободянин Валерий Павлович

Подписано 04.03.09. Формат 60х90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1100. Заказ №17-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-6583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@mail.mipt.ru

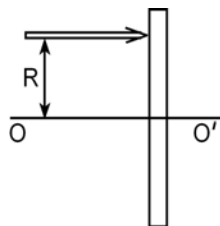
Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2010

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Введение

В 1993 году на вступительных экзаменах в МФТИ абитуриентам была предложена следующая задача.



Задача 1. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 3$ мм падает узкий пучок монохроматического света (рис. 1.1). Пучок параллелен оптической оси OO' , которая перпендикулярна пластинке и проходит через её центр. Расстояние R между пучком и осью OO' равно 3 см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света имеет радиальную зависимость:

Рис. 1.1

$$n(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (1.1)$$

где n_0 и r_0 – постоянные ($n_0 = 1,5$, $r_0 = 9$ см). Определить угол между выходящим пучком и осью OO' .

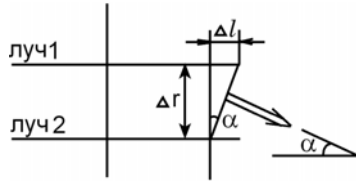
Большая часть абитуриентов при решении этой задачи рассуждала примерно так: «Выделим небольшой участок пластинки в окрестности вошедшего в неё светового пучка. Пластинку можно рассматривать как слоистую среду с показателем преломления, медленно меняющимся от слоя к слою. Поскольку световые лучи параллельны, то вдоль пути любого из лучей показатель преломления не меняется, а, следовательно, не отклоняется и луч».

Увы! Эти рассуждения ошибочны.

В данной задаче мы столкнулись с ситуацией, когда понятие светового луча в той формулировке, которую мы дали в предыдущем задании, требует уточнения. Ведь свет имеет *двойственную* природу. Его можно рассматривать не только как поток частиц (фотонов), но и как систему *электромагнитных волн*. Для видимого света частота изменения поля в такой волне лежит в пределах от $0,38 \cdot 10^{15}$ Гц до $0,86 \cdot 10^{15}$ Гц.

При переходе света из воздуха в стекло происходит изменение длины световой волны (волновое возмущение). Назовём границу волнового возмущения *волновым фронтом* (ВФ) (точное определение ВФ см. в §2). Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка ВФ сама становится источником сферических волн. Эти вновь образовавшиеся волны называются вторичными или элементарными. Огибающая, проведённая по границе вторичных волн, даёт новое положение ВФ. Таким образом, можно воспроизводить ВФ в самых удалённых точках пространства. В любой точке ВФ можно построить нормаль к нему. Она-то (нормаль) и является образом *светового луча*, моделью, позволяющей следить за распространением участка ВФ.

Решение. До известной степени можно следовать логике абитуриентов, приведённой на стр. 3. Допустим, что в пластинке лучи 1 и 2 распространяются параллельно главной оптической оси. На прохождение сквозь неё лучам потребуется время $t_1 = H/v_1 = Hn_1/c$ и $t_2 = Hn_2/c$ соответственно.



Поскольку $n_2 > n_1$, то $t_2 > t_1$. Значит, за то время $\Delta t = t_2 - t_1$, которое луч 2 будет заканчивать свой путь в пластинке, луч 1 пройдёт в воздухе расстояние

Рис. 1.2

дёт в воздухе расстояние

$$\Delta l = c\Delta t = H(n_2 - n_1) \cong -H \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R} \Delta r, \quad (1.2)$$

где Δr – ширина светового пучка.

Теперь пора вспомнить об определении волнового фронта. На выходе из пластинки он отклонится вниз, к главной оптической оси, на угол $\alpha \approx \frac{\Delta l}{\Delta r}$

(см. рис. 1.2). С учётом (1.2) получим

$$\alpha = -H \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R} = 2n_0 H \frac{R}{r_0^2} = \frac{1}{30} \text{ рад.}$$

В заключение введения обсудим границы применимости приближения геометрической оптики. В ряде учебников в качестве условия применимости этого приближения приводят неравенство:

$$D \gg \lambda, \quad (1.3)$$

где D – характерный поперечный размер оптических элементов, λ – длина световой волны. Сразу скажем, что **в общем случае это условие применять нельзя!**

Рассмотрим простейший пример. Пусть на диафрагму диаметром D падает плоский волновой фронт монохроматического излучения с длиной волны λ . В этом случае за диафрагмой волна станет расходящейся из-за дифракции на диафрагме, причём угол расходимости

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (1.4)$$

Введём расстояние r_0 так, что

$$r_0 \cdot \theta = D. \quad (1.5)$$

На этом расстоянии от диафрагмы ширина пучка удвоится. Из (1.5) и (1.6) следует:

$$r_0 = \frac{D^2}{\lambda}. \quad (1.6)$$

Понятно, что на расстоянии $r \gg r_0$ размер освещённой области экрана будет определяться дифракцией света, поэтому приближение геометрической оптики заведомо не работает. В случае же $r \ll r_0$ – этим приближением можно пользоваться.

§ 2. Плоские и сферические волны

Плоскими называются волны, у которых направление распространения одинаково во всех точках пространства. Рассмотрим плоскую незатухающую синусоидальную волну, распространяющуюся в заданном направлении (вдоль оси OX). Выберем некоторую точку пространства. Пусть $A(t)$ – текущее отклонение «высоты» волны от её среднего значения. Эта величина может быть описана с помощью уравнения

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.1)$$

где A_0 – амплитуда волны, φ_0 – её фаза, соответствующая началу отсчёта времени t , а ω – круговая частота, связанная с обычной частотой f соотношением $\omega = 2\pi f$.

Если бы в некий момент времени t_1 удалось остановить волну («вморозить» её в пространство), то отклонение A волны от среднего уровня изменялось бы при переходе от одной точки пространства к другой. Тогда, смещаясь в положительном направлении оси OX вдоль «замороженной» волны, мы обнаружим закономерность изменения высоты волны:

$$A(x) = A_0 \sin(\omega t_1 + \varphi_0 - kx), \quad (2.2)$$

где $k = 2\pi / \lambda$ – пространственная частота (часто параметр k называют волновым числом), λ – длина волны, а kx – набег фазы на длине x .

«Разморозим» волну. Для произвольной точки оси x и произвольного момента времени t «высота» волны будет определяться уравнением

$$A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.3)$$

Если волна распространяется от точечного источника, то её называют сферической. Математическое представление сферической волны отличается от такового для плоской тем, что амплитуда сферической волны зависит от расстояния до источника этой волны: $A(r) = \frac{C}{r}$, где r – расстояние от источника до точки наблюдения, а C – постоянная величина, определяемая из на-

чальных условий задачи. Заметим, что такое представление амплитуды верно для расстояний $r \gg \lambda$.

Следует также иметь в виду, что соответствующим выбором начала отсчёта времени можно избавиться от начальной фазы φ_0 или в уравнении (2.3) перейти от функции \sin к функции \cos .

С учётом сказанного выше уточним понятие волнового фронта (ВФ) и дадим его строгое определение.

Волновым фронтом называется воображаемая поверхность, во всех точках которой в фиксированный момент времени волна имеет одинаковую фазу.

§ 3. Сложение амплитуд монохроматических когерентных волн

Мы не станем решать задачу о сложении колебаний в общем виде, а рассмотрим лишь один частный случай, когда суммируемые волны распространяются вдоль общей оси и имеют одинаковые амплитуды. Разумеется, длины этих волны одинаковы (говорят, что эти волны монохроматические). Кроме того, будем считать, что точка наблюдения и источники обеих волн неподвижны. Тогда слагаемое $\varphi_0 - kx$ в выражении (2.3) для каждой из волн можно заменить новым значением фазы. При этом амплитуда суммарной волны будет равна

$$A_{\text{общ}}(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) + A \sin(\omega t + \varphi_2).$$

По известной из тригонометрии формуле для суммы синусов получим:

$$A_{\text{общ}}(t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (3.1)$$

Легко видеть, что амплитуда результирующей волны определяется выражением:

$$A_0 = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right), \quad (3.2)$$

и в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ может изменяться в пределах от нуля до $2A$. Хорошенько запомните формулу (3.2). Её важность вы по достоинству оцените при решении задач этого задания.

Примечание. В формуле (3.2) разность фаз не зависит от времени. Такого рода колебания называются *когерентными*. В реальности у излученной волны всегда есть начало и конец, т.е. волна излучается в виде куска. Такой кусок волны называется *цугом*. Обычно цуги волн излучаются хаотично. За время наблюдения испускается большое число цугов. Такие волны некогерентны и их взаимного усиления или ослабления (*интерференции*) не наблюдается. Для наблюдения интерференции используют специальные интерференционные схемы, в

которых из одного источника получают два когерентных. Эти два источника могут быть оба мнимыми или один действительный, а другой мнимый.

Задача 2. Для уменьшения доли отражённого света от поверхности стекла на неё наносят тонкую плёнку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (так называемое просветление оптики). Пусть на стекло падает излучение двух длин волн: $\lambda_1 = 700$ нм и $\lambda_2 = 420$ нм. Какой наименьшей толщины h плёнку с показателем преломления $n = 4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) лучей, отражённый свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?

Решение. Согласно формуле (3.2), амплитуда отражённого сигнала будет минимальной, если при суммировании волн, отражённых от верхней и нижней поверхностей плёнки (свет распространяется от двух мнимых источников), будет выполняться соотношение

$$2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0,$$

что эквивалентно условию $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, где m – целое число.

Разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = kx$ (см. комментарий к формуле (2.2)). В данном случае $x = 2h$, поскольку волна, проникшая в плёнку, проходит сквозь неё туда и обратно.

Так как падающий свет состоит из излучения на двух длинах волн, необходимо погасить обе отражённые волны.

$$\begin{cases} k_1 h = \frac{2\pi h}{\lambda_{1\text{стекло}}} = \frac{\pi}{2} + m_1\pi, & \lambda_{1\text{стекло}} = \frac{\lambda_1}{n}, \\ k_2 h = \frac{2\pi h}{\lambda_{2\text{стекло}}} = \frac{\pi}{2} + m_2\pi, & \lambda_{2\text{стекло}} = \frac{\lambda_2}{n}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решая эту систему, получим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_2 + 0,5}{m_1 + 0,5}. \quad (3.4)$$

С другой стороны,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{700 \text{ нм}}{420 \text{ нм}} = \frac{5}{3}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует $5m_1 + 1 = 3m_2$. Наименьшие m_1 и m_2 , для которых выполняется это равенство, таковы: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Отсюда находим h (можно использовать любое из двух уравнений системы (3.3)): $h \approx 394$ нм.

§ 4. Интерференция волн

Определение. Под *интерференцией* волн понимают взаимное усиление или ослабление двух (или большего числа) волн при их наложении друг на друга в процессе одновременного распространения в пространстве.

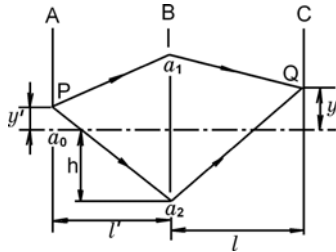


Рис. 4.1

По существу, при интерференции волн интенсивность суммарной волны $I \propto A^2$ не равна сумме интенсивностей исходных волн. Это хорошо видно из формулы (3.2), где $\max I_{\text{общ}} = 4I_0$. Этот результат противоречит постулату №3 геометрической оптики. Но в физической (волновой) оптике не выполняется и постулат №1 (стр. 3 задан. 5). Ярким и поучительным примером интерференции волн может служить *опыт Юнга*. На примере этого опыта становится ясно, почему так сложно обнаружить интерференцию световых волн в обычных жизненных ситуациях. Схема опыта приведена на рис. 4.1. Свет от монохроматического источника освещает щель a_0 на экране A .

Длинная сторона щели перпендикулярна плоскости рисунка. Интерференционная картина наблюдается на экране C . Между точками A и C расположен экран B с двумя щелями a_1 и a_2 , параллельными щели a_0 и симметрично отстоящими от оси системы на расстояние h . Расстояние между экранами A и B равно l' , а между B и C равно l . Рассмотрим, что будет происходить со световыми волнами в этой установке. Возьмём какую-либо точку P щели на экране A , находящуюся на расстоянии y' от оси установки. Посмотрим, какое возмущение создаёт свет, исходящий из точки P в некоторой точке Q экрана C , находящейся на расстоянии y от оси системы. *Разность хода* ΔS в лучах света, пришедших в точку Q через щели a_1 и a_2 , равна

$$\Delta S = (Pa_2 + a_2Q) - (Pa_1 + a_1Q).$$

Как нетрудно убедиться, $(Pa_1)^2 = l'^2 + (h - y')^2$, $(Pa_2)^2 = l'^2 + (h + y')^2$. Отсюда $(Pa_2)^2 - (Pa_1)^2 = (Pa_2 + Pa_1)(Pa_2 - Pa_1) = 4hy'$.

Если мы предположим, что $y' \ll l'$ и $h \ll l'$, а правомерность такого предположения (и с большим запасом) будет очевидна из дальнейшего, то сумму $Pa_2 + Pa_1$ мы смело можем положить равной $2l'$. Тогда $(Pa_2 - Pa_1) = 2hy'/l'$. Аналогично найдём и $(a_2Q - a_1Q)$.

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{2hy'}{l'} + \frac{2hy}{l}. \quad (4.1)$$

В точке Q будет наблюдаться максимум интерференционной картины, если разность хода ΔS составляет целое число длин волн (см. формулу (3.2)).

Минимум интерференционной картины будет наблюдаться тогда, когда эта разность равна $(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, где m – любое целое число, включая и 0.

Если мы будем перемещать по экрану C точку наблюдения Q (при неизменном положении P), то получим картину

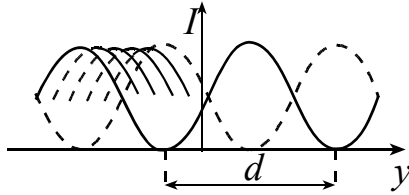


Рис. 4.2

освещённости на экране C примерно такого вида, как показано сплошной кривой на рис. 4.2. То есть на экране C будет наблюдаться система равноотстоящих друг (от друга *экви-дистантных*) полос. Рас-

стояние d между этими полосами найдём

из (4.1):

$$\lambda = \frac{2hd}{l} \Rightarrow d = \frac{l\lambda}{2h}. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) может быть представлена в виде

$$d = \frac{\lambda}{\Omega}, \quad (4.3)$$

где Ω – угол, под которым из точки экрана, в которой наблюдается интерференция, видны источники излучения. В опыте Юнга под таким углом видны отверстия в экране B из центральной точки экрана C :

$$\Omega = \frac{2h}{l}.$$

Посмотрим, что произойдёт с этой картиной, если мы сместим точку P на некоторое расстояние $\delta y'$. Как нетрудно видеть из (4.1), соответствующая точка картинке (т.е. точка, для которой разность хода ΔS остаётся неизмен-

ной) сместится на расстояние δy , определяемое соотношением

$$\frac{\delta y'}{l'} = -\frac{\delta y}{l}.$$

В частности, для того, чтобы на экране C точка максимума интенсивности (см. рис. 4.2) оказалась на месте минимума, т.е. на расстоянии $\delta y = \frac{\lambda l}{4h}$,

нужно сместить точку P на расстояние

$$\delta y' = -\frac{l'}{l} \delta y = -\frac{l' \lambda}{4h} = \Delta. \quad (4.4)$$

Из (4.2) и (4.4) следует, что если щель на экране A будет иметь ширину $D \geq \Delta$, то на экране C каждая точка входной щели экрана A даст свою интерференционную картину, и все они разместятся между сплошной и пунктирной линиями (см. рис. 4.2). Таким образом, на экране C вместо интерференционной картины появится область с равномерной засветкой. (Более строгое рассмотрение показывает, что интерференционная картина исчезает при $D = 2\Delta$). Следовательно, максимальная ширина входной щели, при которой исчезает интерференционная картина, тем больше, чем меньше расстояние между щелями на экране B и чем больше расстояние между экранами.

Сделаем некоторые оценки. Для видимого света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см положим $l = l' = 2 \cdot 10^2$ см, а $2h = 10^{-1}$ см. Тогда $\Delta = 5 \cdot 10^{-2}$ см = 0,5 мм. То есть при вполне приличных размерах всей установки (порядка 4 метров) и минимальном расстоянии между щелями на экране B порядка 1 миллиметра (сами щели, естественно, еще меньше), интерференционная картина исчезает уже при размерах щели на экране A приблизительно равных 0,5 мм. Кроме того, приведённые оценки убеждают нас в правомочности использованного приближения $Pa_1 + Pa_2 = 2l'$.

Предложенные выше оценки помогают понять, почему в обычных условиях так нелегко наблюдать интерференционные явления. Но и это ещё не всё. Период «гребёнки» интерференционных полос на рис. 4.2 определяется при прочих равных условиях длиной волны света. Но если источник света *не* строго монохроматичен, то для разных длин волн масштабы этих «гребёнок» будут различны, и рано или поздно максимум интерференционной картины для одной длины волны придёт на минимум другой. А это означает, что в этом месте интерференционная картина исчезает. Полученные результаты легко обобщить на любые другие двухлучевые интерференционные установки.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Точечный монохроматический источник света S равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеются два маленьких отверстия на расстоянии a друг от друга; расстояние от траектории источника до плоскости равно l' (рис. 4.3). Приёмник света A расположен на оси системы и регистрирует периодически изменяющуюся освещённость. Определите скорость v движения источника S , если частота колебаний интенсивности $f = 15$ Гц. Длина волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $a = 2$ мм, $l' = 1$ м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы. (МФТИ, 1981)

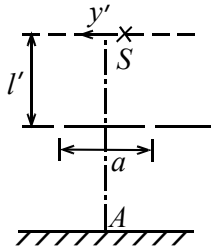


Рис. 4.3

Решение. Период T колебаний интенсивности света в приёмнике A равен $T = 1/f$. За время T источник S сместится на расстояние $\delta y' = vT$. При этом интерференционная картина сдвинется на ширину одной полосы, т.е. на величину $\delta y = d$. Согласно (4.3) $d = \lambda/\Omega$. Если через l обозначить расстояние от плоскости до приёмника, то $\Omega = a/l$. Таким образом, используя (4.4), получим

$$vT = -\frac{l' \lambda}{l \Omega} = -\frac{l' \lambda l}{l a} = -\frac{l' \lambda}{a}. \text{ Откуда } v = -\frac{l' \lambda f}{a}.$$

Знак «минус» указывает на то, что интерференционная картина смещается в сторону, противоположную направлению движения источника S . Модуль скорости v равен $|v| = 4,5 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Задача 4. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения зависимости показателя преломления газов от давления по смещению интерференционной картины. Для этого на пути одного из интерференционных лучей ставится кювета Γ прямоугольной формы длиной $L = 10$ см с исследуемым газом (рис. 4.4), а на

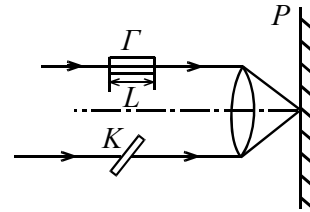


Рис. 4.4

пути другого – стеклянный компенсатор K , с помощью которого добиваются, чтобы в центре интерференционной картины разность хода между интерферирующими лучами равнялась нулю. Какое минимальное изменение показателя преломления Δn можно измерить в таком приборе? Считать, что минимальное надёжно регистрируемое смещение интерференционной картины в плоскости наблюдения P соответствует появлению на месте центрального

максимума первого минимума. Наблюдение ведётся на длине волны $\lambda = 0,6$ мкм. (МФТИ, 1991)

Решение. Изменение фазы луча, на пути которого стоит кювета, равно $\Delta\varphi = \Delta n L k$.

Условие появления на месте центрального максимума первого минимума,

$$\text{согласно (3.2), есть } \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi$$

$$\text{Или } \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n L = \pi \Rightarrow \Delta n = \frac{\lambda}{2L} \Rightarrow \Delta n = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{2 \cdot 0,1 \text{ м}} = 3 \cdot 10^{-6}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

§ 5. Введение

К началу XX века накопилось большое количество экспериментальных данных о величине скорости света, и эти данные подвели учёных к неожиданному заключению.

Во всех инерциальных системах отсчёта скорость света в вакууме одинакова. (I)

После этого ещё в течение нескольких десятилетий экспериментаторы совершенствовали технику и методику измерений, получая значение скорости света со всё большей точностью. Наконец в 1983 году на заседании Генеральной конференции по мерам и весам было принято решение считать величину скорости c света в вакууме равной 299792458 м/с точно.

Заключение (I) поставило перед научным миром массу задач. В ходе их разрешения была создана новая теория – *специальная теория относительности*, или сокращённо СТО.

В фундаменте СТО лежат два принципа:

- 1) принцип постоянства скорости света (I);
- 2) принцип относительности (II).

Современная трактовка принципа относительности имеет следующий вид.

Законы природы, по которым изменяются состояния физических систем не зависят от того, к какой инерциальной системе отсчёта относятся эти изменения. (II)

§ 6. Основные соотношения релятивистской динамики

Поскольку скорость света постоянна в любой инерциальной системе отсчёта (ИСО), логично выражать все другие скорости перемещения не в привычных нам единицах, например, метрах за секунду, а в долях от величины c .

Особенно удобно такое обозначение для скоростей, соизмеримых со скоростью света. Итак, определим безразмерную скорость так: $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. Обозначим символом E полную энергию исследуемого нами материального объекта, а символом \vec{p} – его импульс. Стрелка над значком p означает, что импульс – векторная величина.

Оказывается, между импульсом и энергией существует простая связь:

$$\vec{p} = \vec{\beta} \frac{E}{c}. \quad (6.1)$$

По известному импульсу и энергии объекта можно легко определить его массу:

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}. \quad (6.2)$$

В физике элементарных частиц импульс и массу удобно выражать в энергетических единицах. Импульс, выраженный в этих единицах, следует представить в виде $c\vec{p}$. Тогда формула (6.1) примет вид

$$c\vec{p} = \vec{\beta} E. \quad (6.3)$$

Аналогичным образом, масса записывается как mc^2 , а формула (6.2) принимает вид

$$mc^2 = \sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}. \quad (6.4)$$

В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться именно таким представлением импульса и массы.

Для объектов, находящихся в состоянии покоя, $\beta = 0$. Следовательно, равен нулю и импульс (6.3). Обозначая энергию покоящегося тела символом E_0 , мы из формулы (6.4) получим

$$mc^2 = E_0. \quad (6.5)$$

Подчеркнём, что здесь масса m имеет такой же смысл, как и в ньютоновой механике, т.е. её величина не зависит от выбора ИСО.

Во многих отечественных школьных учебниках и в ряде научно-популярных книг понятие массы используется, по крайней мере, в двух смыслах:

а) масса – как масса покоящегося тела (её, как правило, обозначают символом m_0);

б) релятивистская масса.

Последняя обычно задаётся одним из двух соотношений:

$$M = \frac{E}{c^2}, \quad (6.6)$$

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.7)$$

Формулу (6.6) ввёл в употребление знаменитый французский математик и физик-теоретик Анри Пуанкаре в 1900 году, то есть задолго до создания СТО.

Формулу (6.7) широко использовал один из основоположников СТО – Альберт Эйнштейн. Но он же одним из первых (в 1948 г.) заметил: «Нехорошо вводить понятие массы тела $M = m \left[1 - v^2/c^2 \right]^{-1/2}$, для которого нельзя дать ясного определения. Лучше не вводить никакой другой массы, кроме массы покоя m ». Добавим, что сейчас в школьных учебниках физики в США, Англии и ряде других стран понятие массы вводится аналогично тому, как мы это сделали выше (формула (6.2)), а формулы (6.6) и (6.7) не употребляются.

Введённые нами понятие массы совпадает с определением массы покоя, но поскольку никаких других понятий массы мы не вводим, индекс «0» у символа массы не нужен.

Для изучения последующего материала введём еще два определения:

1) кинетической энергией $E_{кин}$ движущегося объекта будем называть разницу между его полной энергией и энергией покоя:

$$E_{кин} = E - E_0. \quad (6.8)$$

В задаче №6.2 мы покажем, что при малых скоростях это выражение совпадает с классической формулой для кинетической энергии;

2) релятивистским фактором (или Лоренц-фактором) называется коэффициент γ , показывающий во сколько раз энергия движущегося тела больше его энергии покоя:

$$\gamma = \frac{E}{E_0}. \quad (6.9)$$

Само собой разумеется, что всегда $\gamma \geq 1$.

Примечание. Релятивистский фактор определен только для объектов, обладающих массой.

Задача 6.1. Докажите, что β и γ взаимозависимые величины.

Решение. Подставим (6.3) и (6.5) в (6.4): $E_0^2 = E^2 - (\beta E)^2$

$$\text{откуда } E^2(1 - \beta^2) = E_0^2, \quad \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

С учётом формулы (6.9) окончательно получим

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.10)$$

В дальнейшем, для избежания громоздких формул, мы часто будем использовать символ γ , определённый согласно (6.9) или (6.10).

Задача 6.2. Докажите, что при малых скоростях ($\beta \ll 1$) формула (6.8) переходит в классическое выражение для кинетической энергии.

Примечание. В математике есть формулы для приближённого вычисления алгебраических выражений, содержащих малый параметр. Так, для чисел $x \ll 1$ и действительных a , таких что $ax \ll 1$, применима формула

$$(1+x)^a \approx 1+ax. \quad (6.11)$$

(Убедитесь в её справедливости на придуманных вами численных примерах.)

Решение. Выражение для кинетической энергии:

$$E_{\text{кин}} = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 = (\gamma - 1)E_0.$$

Согласно формулам (6.10) и (6.11)

$$\gamma - 1 = (1 - \beta^2)^{-1/2} - 1 \approx \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) - 1 = \frac{\beta^2}{2}.$$

Отсюда

$$E_{\text{кин}} \approx \frac{\beta^2}{2} E_0 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{mc^2}{2} = \frac{mv^2}{2}. \quad (6.12)$$

В заключение заметим, что энергии, с которыми приходится иметь дело в микромире, столь малы, что если их измерять в знакомых вам джоулях, придётся использовать множители, содержащие более десяти нулей. Поэтому были придуманы специальные единицы – электрон-вольты (сокращенно эВ). Известно, что минимальный свободный заряд, встречающийся в природе, равен заряду электрона ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Частица с таким зарядом, преодолев разность потенциалов в один вольт, изменит свою энергию на 1эВ. Следовательно, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Кинетическая энергия «внешних» электронов в атоме обычно не превышает двух десятков электрон-вольт. Примерно такую же энергию необходимо затратить на то, чтобы «оторвать» от атома эти электроны.

§ 7. Законы сохранения

Начнём с энергии.

1. В любой ИСО энергия некоторой совокупности частиц (тел, объектов), не взаимодействующих на расстоянии как между собой, так и с внешним миром,

равна сумме энергий всех частиц, входящих в эту совокупность:

$$E_{\text{сист}} = \sum_i E_i.$$

Величины, подчиняющиеся такому правилу, называются *аддитивными* (от латинского слова *additivus* – прибавляемый).

2. Во всем диапазоне скоростей исследуемых материальных объектов выполняется закон сохранения энергии. Иными словами, если мы сравним энергию системы частиц до и после их взаимодействия (под взаимодействием мы здесь понимаем упругие столкновения, распад), то оказывается справедливым следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{N_1} E_i = \sum_{k=1}^{N_2} E'_k \quad (7.1)$$

Здесь N_1 – число частиц до взаимодействия, N_2 – после него. Вообще говоря, N_1 может отличаться от N_2 .

Заметим, что в общем случае необходимо учитывать ещё и потенциальную энергию U их взаимодействия. Например, энергия системы двух заряженных частиц

$$E_{\text{сист}} = E_1 + E_2 + U_{12}. \quad (7.2)$$

Перейдём к *импульсу*.

а) Импульс, как и энергия, обладает свойством аддитивности, т.е. импульс системы частиц равен векторной сумме импульсов частиц, входящих в эту

сумму: $\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_i \vec{p}_i$.

б) Закон сохранения импульса имеет такой же вид как и в классической физике: $\sum_{i=1}^{N_1} \vec{p}_i = \sum_{k=1}^{N_2} \vec{p}'_k$.

§ 8. Дефект массы

Обычно у учащихся после изучения школьного курса физики создается впечатление, что дефект массы наблюдается только в ядерных или термоядерных реакциях. Это не так!

Дефект массы – самое заурядное и распространённое явление.

Задача 8.1. Ученик ФЗФТШ наливает в чайник из водопроводного крана 2 литра воды ($t = 14^\circ\text{C}$), ставит его на плиту и доводит до кипения. Предположим, что испарения не происходит. На сколько изменится масса воды в чайнике?

Решение. Согласно (6.4) $mc^2 = \sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}$, а так как $\vec{p} = 0$ (центр масс воды как до, так и после нагрева покоится), то $mc^2 = E$. Во время

нагрева воды ей была передана дополнительная энергия $\Delta E = mc_B \Delta T$, где $c_B = 4,186 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ – удельная теплоёмкость воды. Тогда $\Delta mc^2 = \Delta E$. Относительное увеличение массы

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_B \Delta T}{c^2} \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = \frac{4,186 \cdot 10^3 \cdot 86}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4 \cdot 10^{-12}.$$

Для атомного ядра дефект массы даётся формулой

$$\Delta m_{\text{сист}} = Zm_p + Nm_n - m(Z, N),$$

где m_p , m_n и $m(Z, N)$ – масса протона, нейтрона и атомного ядра соответственно. Z и N – число протонов и нейтронов в атомном ядре.

Задача 8.2. Докажите, что масса атома водорода меньше суммы масс составляющих его протона и электрона. Считать, что скорость электрона в атоме мала ($\beta \ll 1$).

Решение. Атом водорода – это связанная система. Согласно (6.4) и (7.2)

$$(E_p + E_e + U)^2 - (c\vec{p}_p + c\vec{p}_e)^2 = (m_H c^2)^2.$$

Здесь E_p – энергия протона, E_e – энергия электрона, а m_H – масса атома водорода.

По условию задачи атом водорода можно считать покоящимся, т.е. $c\vec{p}_p + c\vec{p}_e = 0$. Из этих формул следует $E_p + E_e + U = m_H c^2$, или с учётом (6.8),

$$m_p c^2 + E_{\text{кин}(p)} + m_e c^2 + E_{\text{кин}(e)} + U = m_H c^2. \quad (8.1)$$

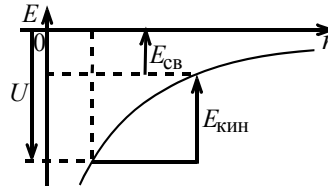
Поскольку $\beta \ll 1$, кинетическая энергия каждой из частиц может быть вычислена по классической формуле. Поскольку

$$\frac{E_{\text{кин}(p)}}{E_{\text{кин}(e)}} = \frac{m_e}{m_p} \approx 5 \cdot 10^{-4} \ll 1, \quad (8.2)$$

кинетической энергией протона можно пренебречь. Дефект массы атома водорода $\Delta m = (m_p + m_e) - m_H$. Тогда с учётом условия (8.2) формулу (8.1) можно представить в виде

$$\Delta mc^2 = -U - E_{\text{кин}(e)}. \quad (8.3)$$

Величина $E_{\text{св}} = -U - E_{\text{кин}(e)}$ называется энергией связи электрона с ядром (рис. 8.1). Численно она равна энергии, которую нужно затратить на ионизацию атома водорода.


Рис. 8.1

Потенциальная энергия атома водорода обусловлена кулоновским взаимодействием электрона с протоном. Она отрицательна и может быть найдена по известной формуле:

$$U = -k \frac{e^2}{r}. \quad (8.4)$$

В этих же обозначениях закон Кулона имеет вид $F = k \frac{e^2}{r^2}$.

Здесь e – модуль заряда электрона или протона, а k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Предположим, что электрон движется по круговой орбите радиуса r . Его центростремительное ускорение обеспечивается кулоновским притяжением:

$$m_e \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}.$$

Последнюю формулу легко привести к виду

$$2 \left(\frac{m_e v^2}{2} \right) = k \frac{e^2}{r}. \quad (8.5)$$

С учётом (8.4) получается

$$2E_{\text{кин(е)}} = -U. \quad (8.6)$$

Подстановка (8.6) в (8.3) даст $\Delta mc^2 = E_{\text{кин}}$ или с учётом (6.12)

$$\Delta mc^2 = \frac{m_e v^2}{2} \Rightarrow \Delta m = m_e \frac{\beta^2}{2}.$$

Примечание. В дальнейшем мы покажем, что максимальная скорость электрона, движущегося по круговой орбите в атоме водорода, равна $\beta = 1/137$, откуда $\Delta m / m_e \approx 3 \cdot 10^{-5}$.

ФИЗИКА АТОМОВ И АТОМНОГО ЯДРА

§ 9. Атомная энергетика. Термоядерный синтез

Итак, протону и электрону энергетически «выгодно» объединиться в атом водорода. Можно сделать даже более сильное утверждение: всякая физическая система стремится занять состояние с наименьшей потенциальной энергией.

Это общий принцип, в физике он столь же важен как и принцип Ферма в оптике. Согласно этому принципу атомы объединяются в молекулы, лёгкие ядра сливаются в более тяжёлые, ядра тяжёлых элементов (уран, плутоний, радий) распадаются на более лёгкие осколки. При этом выделяется энергия, равная дефекту массы исходной системы.

Измерения масс атомных ядер показали, что практически любой наперёд заданный химический элемент представляет собой смесь атомов с одинаковым числом протонов, но разным числом нейтронов. Атомные ядра одного и того же химического элемента с разным числом нуклонов называют изотопами. Эти изотопы обладают одинаковыми химическими свойствами, но часть из них стабильны, а другие обладают разным временем жизни и распадаются по разным схемам на разные частицы. Стабильными (устойчивыми) являются лишь те ядра (и, соответственно, изотопы) у которых минимальна энергия связи по сравнению со всеми другими ядрами, в которые данное ядро могло бы превратиться.

На рисунке 9.1 приведена зависимость энергии связи (приходящейся, в среднем, на один нуклон атомного ядра) от числа нуклонов в ядре. Нуклон – это общее название для протонов и нейтронов. Именно из них состоят ядра всех химических элементов.

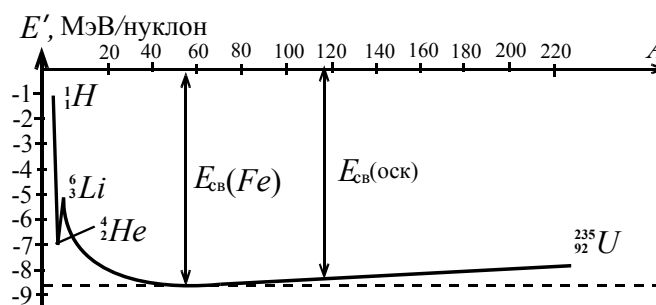


Рис. 9.1

Задача 9.1. Пользуясь диаграммой, представленной на рис. 9.1, укажите, ядрам каких элементов «выгодно» распасться на два осколка, а каких – слиться образовав новое ядро. Оцените энергию, выделяющуюся при распаде ядра урана ${}^{235}_{92}U$ на два примерно равных осколка (здесь и далее подстрочный индекс указывает число протонов, а надстрочный – число нуклонов в ядре).

Решение. Наибольшая (по абсолютной величине) энергия связи, приходящаяся на нуклон, соответствует ядру железа. Следовательно, ядра тяжелее железа склонны к распаду, а более легкие – к синтезу. Другими словами, если после распада исходного «материнского ядра» осколки будут иметь большую (по абсолютной величине) энергию связи, т.е. на диаграмме энергий окажутся ниже исходного ядра, то такой процесс может произойти. Аналогичные рассуждения справедливы и для синтеза (слияния) ядер.

Предположим, что уран распадается на два примерно равных осколка. Согласно энергетической диаграмме, приведенной на рис. 9.1, в продуктах деления урана на один нуклон приходится энергия связи $E_{\text{св}} = 8,5$ МэВ/нукл.

Для урана получим $E_{\text{св}}(U) = E'_{\text{св}}(U) \cdot A$ или численно

$$E_{\text{св}}(U) \approx 7,6 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}} \cdot 235 \text{ нукл.} = 1786 \text{ МэВ.}$$

Для продуктов деления урана $E_{\text{св}}(\text{оск}) \approx 2(E_{\text{св}} \cdot A_{\text{оск}})$, откуда

$$E_{\text{св}}(\text{оск}) \approx 2 \cdot 8,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} \cdot 117 \text{ нукл.} \approx 1990 \text{ МэВ.}$$

Следовательно, при распаде ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ выделяется энергия

$$\Delta E = E_{\text{св}}(\text{оск}) - E_{\text{св}}(U) \approx 200 \text{ МэВ.}$$

В пересчёте на нуклон это составит приблизительно 0,84 МэВ.

Кажется, все просто и ясно. Но в таком случае, почему до сих пор не распались элементы тяжелее железа? Почему легкие ядра не объединились в более тяжелые?

Дело в том, что выше мы рассматривали только принципиальную возможность слияния или распада ядер. Сам же механизм этой реакции нас не интересовал. А весь секрет как раз и состоит в том, чтобы запустить этот механизм.

Задача 9.2. Оцените энергию, выделяющуюся при слиянии ядер лития ${}^6_3\text{Li}$ и дейтерия ${}^2_1\text{H}$ (изотопа водорода, ядро которого состоит из одного протона и одного нейтрона. Часто его обозначают символом D).

Процесс слияния ядер дейтерия и лития идет в два этапа:



Нейтроны, подобно катализаторам в химических реакциях, используются только как промежуточное звено и, прореагировав в одном цикле, могут вступать в другой.

Решение. Оценим энергию связи исходных (1) и конечных (2) продуктов: $E_{\text{св}}(1) = E_{\text{св}}(\text{Li}) + E_{\text{св}}(\text{D})$, откуда

$$E_{\text{св}}(1) \approx 5 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} \cdot 6 \text{ нуклон} + 1 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} \cdot 2 \text{ нуклон} = 32 \text{ МэВ},$$

$$E_{\text{св}}(2) = E_{\text{св}}(\text{He}) + E_{\text{св}}(\text{He}), \text{ откуда}$$

$$E_{\text{св}}(2) \approx 2 \cdot 7 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} \cdot 4 \text{ нуклон} = 56 \text{ МэВ},$$

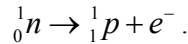
$$\Delta E_{\text{св}} = 56 \text{ МэВ} - 32 \text{ МэВ} = 24 \text{ МэВ},$$

или в пересчете на нуклон 3 МэВ. Это в три с половиной раза больше, чем в реакции деления урана. По сравнению с химическими реакциями оба процесса (и распад, и синтез ядер) дают колоссальный выигрыш в энергии, высвобождающейся из единицы массы вещества.

§ 10. β -распад. Нейтрино

Распад ядра некоторого элемента X на два осколка Y и W можно схематически показать с помощью диаграммы ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z_1} Y + {}^A_{Z_2} W$, где $A_1 + A_2 = A$, $Z_1 + Z_2 = Z$. Наиболее типично при такой схеме распада – появление в качестве одного из осколков α – частицы (ядра атома гелия: ${}^4_2\text{He}$). Однако, в некоторых реакциях вещество излучает лёгкие заряженные частицы – β – лучи. Вскоре после обнаружения этого явления β – лучи отождествили с электронами. В ходе β – распада изменялось число протонов (число нуклонов в ядре сохранялось) и бесследно исчезала часть энергии ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^-$. На первый взгляд из этого факта следовало два совершенно неожиданных вывода:

- 1) В ядерных реакциях может нарушаться закон сохранения энергии!
- 2) Нейтрон в ядре β -активного элемента распадается на протон и электрон:



(10.1)

Следовательно, нейтрон – не элементарная частица, а всё вещество состоит только из двух типов частиц – протонов и электронов! Сразу скажем, что оба вывода оказались поспешными и не соответствовали действительности. Последующие эксперименты и теоретические исследования показали, что протон ничуть не более элементарен, чем нейтрон.

Для спасения закона сохранения энергии немецкий физик Вольфганг Паули выдвинул гипотезу: в ходе распада нейтрона рождается ещё одна частица. Она электрически нейтральна, а её масса на несколько порядков меньше массы протона. По предложению Энрико Ферми эту частицу назвали «нейтрино» (в переводе с итальянского это означает – "нейтрончик"). Именно нейтрино «по-

винны» в исчезновении энергии при распаде нейтрона. «Исправленная» реакция (10.1) должна выглядеть так:



(Строго говоря $\tilde{\nu}$ – называется антинейтрино. Но о различиях между нейтрино и антинейтрино вы узнаете при обучении в вузе).

В дальнейшем было установлено, что в свободном состоянии, т.е. «вне коллектива», нейтрон существовать не может и через несколько минут одиночества распадается по схеме (10.2). Долгое время считали, что нейтрино из-за его нейтральности вообще невозможно обнаружить. Но экспериментаторы справились с этой трудной задачей. К 1956 году существование нейтрино было доказано экспериментально. Сейчас детекторы нейтрино есть во многих развитых странах. Дело идет к возникновению целых научных направлений – нейтринной астрономии и нейтринной геофизики.

§ 11. Радиоактивность

Выше мы рассмотрели ядерные реакции с точки зрения закона сохранения энергии. Но как долго живут различные изотопы?

Закон изменения числа радиоактивных ядер с течением времени сначала был получен экспериментально. Оказалось, что распад большого количества ядер любого радиоактивного изотопа подчиняется закону:

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{0,5}}}, \quad (11.1)$$

где N_0 – начальное число ядер, $T_{0,5}$ – **период полураспада**, то есть время, за которое исходное количество ядер убывает вдвое.

Позднее закон радиоактивного распада получили теоретически, исходя из статистических представлений о характере процессов, протекающих внутри радиоактивных атомных ядер.

Введём ещё одно понятие: активностью A радиоактивного образца называется число распадов атомных ядер, происходящих за 1 с:

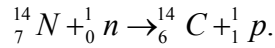
$$A = \left| \frac{\Delta N}{\Delta t} \right|. \quad (11.2)$$

С учётом (11.1), активность можно выразить иначе:

$$A = \frac{N}{T_{0,5}} \ln 2. \quad (11.3)$$

Единица активности – 1 распад в секунду, получила специальное название – беккерель (Бк).

Задача 11.1. В верхних слоях земной атмосферы под действием космических лучей часть атомов азота превращается в углерод:



Этот изотоп с периодом полураспада $T_{0,5} = 5570$ лет усваивается растениями с углекислым газом. Активность 1 г углерода «биологического происхождения» $A \approx 0,25$ Бк. Какова доля α углерода ${}^6_{14}C$ в 1 г углерода «биологического происхождения»?

Решение. В 1 г углерода содержится $N_0 = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 5 \cdot 10^{22}$

атомов. Поскольку доля изотопов ${}^{14}C$ ничтожна по сравнению с ${}^{12}C$, можно считать, что молярная масса углерода $\mu = 12$ г/моль. Из формулы (11.3)

$$A = 0,25 = \frac{N \ln 2}{5570 \cdot 3,15 \cdot 10^7}, \text{ откуда число радиоактивных}$$

атомов углерода: $N = 0,63 \cdot 10^{11}$ атомов. Следовательно, доля радиоактивного изотопа углерода в образце составляет

$$\alpha = \frac{N}{N_0} = \frac{0,63 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{22}} = 1,26 \cdot 10^{-12}.$$

§ 12. Элементарная частица по имени «фотон»

К концу прошлого века казалось бесспорно доказанным фактом, что свет – суть электромагнитные волны. Даже виртуозные опыты Петра Николаевича Лебедева (1899 г.), в которых он доказал, что свет оказывает давление на вещество, прекрасно вписывались в волновую теорию. На этом фоне сообщение немецкого физика Макса Карла Эрнста Людвиг Планка, сделанное 14 декабря 1900 года (последний месяц уходящего века), прозвучало явным диссонансом. Планк показал, что энергия излучается веществом только порциями (квантами), причём, величина кванта прямо пропорциональна частоте колебаний электромагнитного поля волны: $E = h\nu$.

Здесь h – коэффициент пропорциональности, получивший в последующем название «постоянная Планка»:

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}.$$

Примечание. Точно такое же название применяют к коэффициенту $\hbar = h/(2\pi)$, поэтому будьте внимательны, когда встречаете в формулах эти обозначения. Постоянная Планка $\hbar = 6,58 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$. Наряду со скоростью света она принадлежит к числу фундаментальных мировых постоянных.

В дальнейшем экспериментаторы придумывали самые изощренные опыты для расщепления излученного кванта света, однако все их попытки заканчивались неудачами. Вся совокупность опытов убедительно свидетельствовала о том, что квант света ведёт себя как элементарная частица. В 1923 году амери-

канский физик Артур Комптон, сделавший решающий эксперимент в доказательстве этого факта, предложил для кванта электромагнитного излучения изящное название – *фотон*.

Задача 12.1. Определите кинетическую энергию и массу фотона, имеющего частоту ν .

Решение. Поскольку для света $\beta=1$, то согласно (6.3) $cp = E$. Подставим найденное значение в (6.4): $(mc^2)^2 = E^2 - E^2$, откуда $mc^2 = 0$.

С учётом этого результата из формул (6.5) и (6.8) следует $E_{\text{кин}} = E$. Получается, что фотон – безмассовая частица, обладающая только кинетической энергией.

Задача 12.2. Фотон обладает энергией $E = 3,1 \text{ эВ}$. Определите длину волны соответствующего электромагнитного излучения.

Решение. Из курса оптики известно, что $\lambda\nu = c$, а по формуле Планка $E = h\nu$. Из этих двух уравнений следует равенство

$$\lambda = \frac{ch}{E}. \quad (12.1)$$

Численная подстановка даёт $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ (ультрафиолетовое излучение).

Примечание. 1 Один ангстрем 1 \AA – единица длины в атомной физике, равная 10^{-10} м и названная в честь шведского физика и астронома Андерса Йонаса Ангстрема. Например, диаметр атома водорода равен приблизительно 1 \AA .

Примечание. В атомной и ядерной физике постоянные c и h «любят ходить парочкой». Для справки приведем значение их произведения

$$ch = 1,24 \cdot 10^4 \text{ эВ} \cdot \text{\AA}.$$

§ 13. Позитроны. Аннигиляция

Позитрон – это античастица по отношению к электрону. Массы позитрона и электрона равны, а заряды противоположны по знаку.

В результате столкновения этих частиц происходит аннигиляция. Образно говоря, при встрече они попадают в такие «тесные объятия» друг друга, что «испускают дух», т.е. превращаются в два фотона, энергия каждого из которых более $0,5 \text{ МэВ}$. Вот схема такой реакции: $e^- + e^+ \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$.

Для упрощения расчётов предположим, что частицы имеют одинаковые скорости и движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой. Ясно, что общий импульс системы равен нулю. До столкновения формула (6.4) имеет вид

$$(m_{\text{сист}} c^2)^2 = (E_{e^-} + E_{e^+})^2 - (0)^2.$$

Что мы получим после столкновения?

Поскольку фотон – безмассовая частица, то, кажется, что суммарная масса двух безмассовых частиц тоже равна нулю.

Давайте проверим. После реакции формула (6.4) по-прежнему имеет вид

$$(m_{\text{сист}} c^2)^2 = (E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2})^2 - (0)^2.$$

Здесь E_{γ_1} и E_{γ_2} – энергии родившихся фотонов, $E_{\gamma_1} > 0$ и $E_{\gamma_2} > 0$.

Более того, согласно (7.1) $E_{e^-} + E_{e^+} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$.

Невероятно! Масса двух безмассовых частиц в сумме равна удвоенной массе электрона. Вывод: **масса – неаддитивная величина.**

§ 14. Гипотеза Луи де Бройля

В 1922 году американский физик-экспериментатор Артур Холли Комптон получил прямое экспериментальное доказательство корпускулярных свойств света, наблюдая рассеяние высокоэнергетичных фотонов на свободных электронах. С этого момента ученый мир смирился с мыслью, что фотон обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами. Появился даже специальный термин – корпускулярно-волновой дуализм.

Над столь выделенным положением фотона относительно других элементарных частиц задумался французский физик Луи де Бройль. В конце концов он пришел к мысли о том, что корпускулярные и волновые свойства должны быть присущи любым формам материи. Чтобы сходство свойств частиц и фотонов было более сильным, де Бройль предположил, что фотоны имеют массу $m_{\phi} \sim 10^{-50}$ Г. Подтвердить или опровергнуть эту гипотезу экспериментаторы до сих пор не могут. Из теоретических выкладок де Бройля следовало: любой частице, обладающей импульсом p , должна соответствовать волна, длина которой может быть найдена по формуле

$$\lambda_D = \frac{h}{p}. \quad (14.1)$$

В редакции физического журнала, куда де Бройль принес свою работу, ему ответили отказом. Только благодаря счастливому стечению обстоятельств в сентябре 1924 года работа вышла в свет. Любопытно мнение А. Эйнштейна об этой статье де Бройля. В письме к Макс Борну он писал: «Прочти её. Хотя и кажется, что писал её сумасшедший, написана она солидно».

Спустя два года сразу две независимые группы исследователей обнаружили дифракцию электронов на кристаллической решетке. Идея де Бройля оказалась верной! С тех пор волны материи стали называть *волнами де Бройля*.

За открытие волн материи Луи де Бройль в 1929 году был удостоен Нобелевской премии.

Задача 14.1. Найдите зависимость длины волны де Бройля электрона от его скорости для всего диапазона скоростей ($0 < v < c$).

Решение. Выражение для длины волны де Бройля:

$$\lambda_D = \frac{h}{p} = \frac{ch}{cp} = \frac{ch}{\beta E} = \frac{ch}{\beta \gamma E_0}.$$

Здесь, как и ранее, $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $E_0 = m_e c^2$. Выражение $\frac{ch}{E_0}$ имеет размерность длины. Обычно его называют комптоновской длиной волны и обозначают символом Λ :

$$\Lambda = \frac{ch}{E_0}, \quad \Lambda = 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}.$$

(14.2)

Сравните формулу (14.2) и (12.1). Впечатляющее сходство!

С учётом принятых обозначений выражение для λ_D упрощается:

$$\lambda_D = \frac{\Lambda}{\beta \gamma}.$$

В случае малых скоростей ($\beta \ll 1, \gamma \approx 1$),

$$\lambda_D = \frac{\Lambda}{\beta} = \frac{h}{mv}. \quad (14.3)$$

Впрочем, этот результат получается сразу из (14.1), ибо при малых скоростях $p = mv$.

В другом предельном случае ($\beta \approx 1$) мы получим $\lambda_D = \frac{\Lambda}{\gamma}$.

Последняя формула позволяет оценить энергию, до которой нужно ускорить электрон с тем, чтобы электронными волнами «просвечивать» атомное ядро и изучать его внутреннюю структуру. Для этого длина волны де Бройля электрона должна быть много меньше характерных размеров ядра ($\sim 10^{-15}$ м) или размеров тех структур, из которых оно может состоять. Несложные численные оценки показывают, что для получения таких энергий требуются мощнейшие ускорители. Стоимость их строительства и эксплуатации под силу лишь очень крупным и богатым странам. Все это послужило толчком к международной кооперации физиков, занимающихся поиском и исследованием элементарных частиц.

§ 15. Модель атома водорода Бора – де Бройля

В школьных учебниках физики достаточно подробно освещены такие вопросы, как история открытия Эрнестом Резерфордом атомного ядра и история построения молодым датским физиком Нильсом Бором модели атома водорода. Обратим ваше внимание на то, что модель Бора, несмотря на её явные дос-

тоинства, не могла объяснить наблюдаемую на опыте сферическую симметрию атома водорода или показать, почему электрон, находящийся на стационарной орбите и испытывающий при этом колоссальное центростремительное ускорение, не излучает электромагнитные волны, как того требует теория Максвелла.

На последний вопрос попытался ответить Луи де Бройль, применив к модели Бора свою гипотезу.

Электрон обладает волновыми свойствами. Если длина его стационарной орбиты кратна целому числу длин волн де Бройля, то на орбите установятся стоячие волны. Для стоячих волн уже невозможно указать направление их движения (в узловой точке можно поставить стенку; при этом стоячая волна сохранится), а раз нет движения вдоль орбиты – нет и излучения.

Давайте получим из модели Бора – де Бройля формулы, необходимые для решения задач.

Как и в школьных учебниках, будем рассматривать атом водорода, в котором электрон движется по круговой орбите. Её радиус называют *радиусом Бора* и обозначают символом r_B . Чтобы не загромождать выкладки лишними символами предположим, что на длине орбиты электрона уместается только одна длина волны де Бройля. Такое состояние атома называется *основным*. В конце параграфа мы приведем формулы для общего случая, когда $n > 1$. Выражение для радиуса орбиты электрона: $2\pi r_B = \lambda_D$.

Предположим, что $\beta \ll 1$. Тогда с учётом (14.3) мы можем записать

$$2\pi r_B = \frac{h}{m\nu} = \frac{ch}{\beta E_0}, \quad (15.1)$$

$$E_{\text{кин(е)}} = \frac{m_e \nu^2}{2} = \frac{E_0 \beta^2}{2}. \text{ Согласно (8.5)}$$

$$\frac{ke^2}{r_B} = 2E_{\text{кин(е)}}. \quad (15.2)$$

Решая систему уравнений (15.1) и (15.2), мы получим выражение для

скорости электрона: $\beta = k \frac{e^2}{c\hbar}$. Численная подстановка показывает, что скорость электрона в основном состоянии атома водорода в 137 раз меньше скорости света. Следовательно, наше предположение о том, что $\beta \ll 1$ было верным.

Энергия ионизации атома водорода, находящегося в основном состоянии, называется энергией Ридберга или просто ридбергом и обозначается символом Ry . Легко видеть, что

$$Ry = \frac{E_0 \beta^2}{2}. \quad (15.3)$$

Численно $Ry = 13,6$ эВ.

Примечание. В учебниках ридберг обычно выражают через основные константы m , h , e :

$$Ry = k^2 \frac{me^4}{2\hbar^2}. \quad (15.4)$$

Записи (15.3) и (15.4) эквивалентны.

А теперь перепишем полученные нами формулы применительно к общему случаю, когда на орбите помещается n ($n > 1$) волн:

$$\beta_n = \frac{\beta}{n}, \quad r_n = r_B n^2, \quad E_n = -\frac{Ry}{n^2}.$$

Состояния, в которых на орбите электрона укладывается целое число волн де Бройля, называются *стационарными*. Если этих волн больше одной, говорят, что атом находится в возбуждённом состоянии. Электрон может достаточно долго (по масштабу атомных времён) находиться в возбуждённом состоянии. Но, в конце концов, он должен вернуться в основное состояние с $n = 1$ (иногда через один или несколько промежуточных уровней с меньшим номером n). При таком переходе избыток энергии $\Delta E = E_{n_1} - E_{n_2} = E_{12}$ излучается в виде фотона: $E_{12} = h\nu_{12}$.

§ 16. Электронная эмиссия и фотоэффект

Для того, чтобы отделить электрон от атома, необходимо затратить энергию, равную по величине энергии связи этого электрона с ядром. Похожая ситуация наблюдается и при попытках извлечь электрон из твердого вещества, например, из диэлектрика или металла. Процесс выхода электрона из металла, называется электронной эмиссией, а величина энергии, необходимой для эмиссии электронов – работой выхода. Обозначается работа выхода $A_{\text{вых}}$. Для каждого металла эта работа имеет свое конкретное значение.

Существует много способов передачи энергии электронам металла. Например, её могут принести от какого-либо внешнего источника ионы, электроны или фотоны.

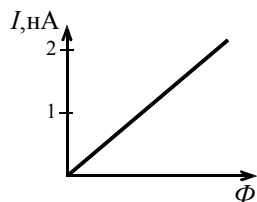


Рис. 16.1

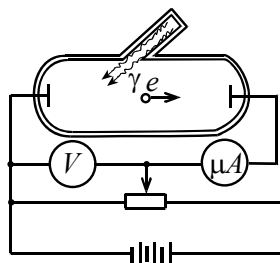


Рис. 16.2

Электронная эмиссия, происходящая под действием света (фотонов), получила название фотоэлектрического эффекта или просто *фотоэффекта*, а поток электронов вылетающих с поверхности металла называют *фототоком*. Открыл фотоэффект Генрих Рудольф Герц в 1887 году, а подробнейшим образом исследовал его наш соотечественник Александр Григорьевич Столетов. А.Г. Столетов установил зависимость фототока от интенсивности светового потока Φ (рис. 16.1). Он же обнаружил, что фототок наблюдается только в тех случаях, когда длина волны падающего излучения меньше некоторого значения. Столетов сконструировал незамысловатую установку (рис. 16.2) и с её помощью изучил зависимость фототока от напряжения, приложенного между фотокатодом и тонкой металлической сеткой, находящейся в непосредственной близости от фотокатода. На рис.16.3 приведена полученная им зависимость. Фотон поглощается в образце целиком в единичном акте взаимодействия. Предположим, что энергии фотона достаточно для выбивания электрона из металла. В этом случае справедливо следующее неравенство

$$h\nu \geq E_{\text{кин}(e)} + A_{\text{вых}} \quad (16.1)$$

Почему пишется неравенство, а не строгое равенство?

Дело в том, что чем глубже проникает фотон, чем на большей глубине происходит его поглощение, тем с большей глубины придется выбираться электрону к поверхности металла. По дороге он может растерять значительную часть полученной энергии. Поэтому электроны вылетают с поверхности в разные стороны и с разными скоростями (см. рис.16.4). На практике для того, чтобы определить работу выхода электрона, пользуются установкой, аналогичной установке Столетова.

На сетку подают отрицательный (относительно фотокатода) потенциал V . При некотором значении $V = V_3$ этого потенциала ни один выбитый из катода электрон не сможет достичь анода. Все электроны окажутся «запертыми». Тогда неравенство (16.1) превращается в равенство

$$h\nu = eV_3 + A_{\text{вых}}.$$

Каждому заданному потенциалу V_3 соответствует своя минимальная частота или максимальная длина электромагнитной волны падающего излучения. Эту длину волны λ_{max} называют красной границей фотоэффекта.

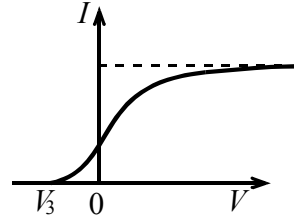


Рис. 16.3

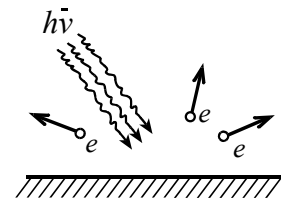


Рис. 16.4.

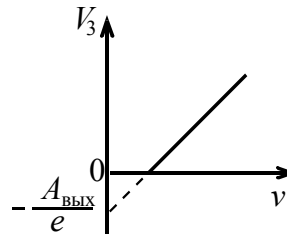


Рис. 16.5

Зависимость задерживающей разности потенциалов от частоты падающего света (см. рис. 16.5) впервые установил немецкий физик-экспериментатор Филипп Эдуард Антон Ленард в 1902 году). Объяснение же дал спустя года Альберт Эйнштейн. В 1921 году за объяснение фотоэффекта ему присудили Нобелевскую премию.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте принцип Гюйгенса.
2. Рассмотрите ход пучка лучей, преломившихся в плоскопараллельной пластинке (задача № 1 из введения к заданию №6). На каком расстоянии F от этой пластинки пучок (или его мысленное продолжение) пересечёт главную оптическую ось?
3. В фокусе тонкой собирающей линзы (фокусное расстояние $F = 24$ см, относительное отверстие $F/D = 8$) установлен точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. На каком расстоянии от линзы ширина пучка вышедшего из неё удвоится?
Примечание. Здесь D – диаметр линзы.
4. Два когерентных монохроматических пучка одинаковой интенсивности сходятся на экране под малым углом. В результате чего на экране наблюдается интерференционная картина. В некоторой точке экрана разность фаз $\Delta\varphi$ волн из этих пучков равна 3λ . Какой будет освещенность экрана в этой точке?
а) максимальной; б) минимальной.
- 5*. Могут ли создавать интерференционную картину мнимые источники света, которые сами являются изображением некоторого действительного источника? Если – нет, дайте обоснование. Если – да, объясните в каких случаях и приведите соответствующие примеры.
6. На экране получена интерференционная картина от двух щелей, освещенных гелий-неоновым лазером ($\lambda_1 = 633$ нм). Интерференционные максимумы отстоят друг от друга на расстоянии $L_1 = 1$ мм. Каким будет расстояние L_2 между максимумами, если щели осветить аргоновым лазером ($\lambda_2 = 488$ нм)?
- 7*. Почему энергии α – частиц при α – распаде одинаковых ядер одинаковы, а энергии β – частиц при β – распаде одинаковых ядер различны?
- 8*. Возможна ли реакция распада $p \rightarrow n + e^+ + \nu$? Ответ обоснуйте.
Указание. Смотрите материал в §10.
9. В классической механике масса, энергия и импульс – аддитивные величины. Какая из них не является аддитивной величиной?
- 10*. Для боровской модели атома водорода оцените радиус орбиты электрона, центростремительное ускорение которого равно \vec{g} .

Задачи

Задача 1. Свет от точечного источника света S (длина волны излучения λ) после прохождения бипризмы с отклоняющими углами α ($\alpha \ll 1$) и показателем преломления стекла n , создаёт на экране \mathcal{E} интерференционную картину

(рис. 1). Определите ширину интерференционных полос в центре экрана, если расстояние от источника S до бипризмы $-Z$, а до экрана $-L$.

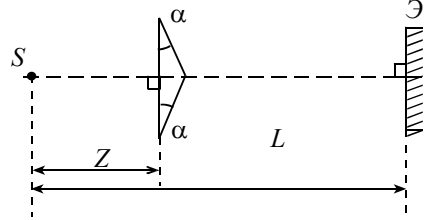


Рис. 1

Задача 2. Прозрачный сосуд прямоугольной формы заполнен солевым раствором с переменной по высоте z плотностью (рис. 2). На боковую поверхность сосуда (вдоль нормали к ней) падает параллельный пучок монохроматического света, для которого зависимость показателя преломления раствора от высоты z имеет вид $n_z = n_0 - (n_0 - n_1)z/H$, где n_0 , n_1 и H – константы. Ширина сосуда L . Определите угол отклонения δ выходящего пучка. Считайте, что угол δ мал.

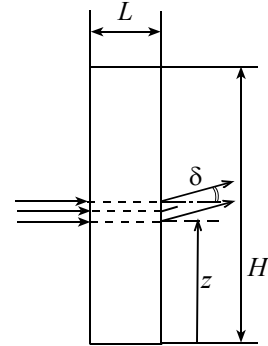


Рис. 2

Задача 3. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 3$ мм падает узкий пучок монохроматического света (рис. 3). Пучок параллелен оптической оси OO' , которая перпендикулярна пластинке и проходит через ее центр. Расстояние R между пучком и осью OO' равно 4 см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света имеет радиальную зависимость:

$$n(r) = n_0 \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \right], \text{ где } n_0 \text{ и } r_0 \text{ – постоянные}$$

($n_0 = 1,4$, $r_0 = 12$ см). Определить угол между выходящим пучком и осью OO' в двух случаях: показатель степени $m = 1$; показатель степени $m = 2$. Для каждого из этих случаев определите, на каком расстоянии от плоскопараллельной пластинки преломлённый пучок лучей (или его мысленное продолжение) пересечёт ось OO' системы.

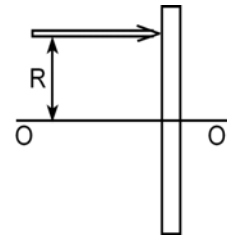


Рис. 3

Задача 4*. Точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм расположен посередине между неподвижными плоскопараллельными зеркалами, расстояние до которых $h = 2$ см. На расстоянии $L = 2$ м от источника расположен экран \mathcal{E}_1

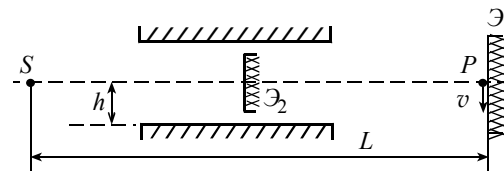


Рис. 4

(рис. 4), на котором наблюдается интерференционная картина, создаваемая двумя пучками света, отражёнными

от зеркал. Прямой пучок света от источника перекрывается экраном \mathcal{E}_2 . В плоскости экрана \mathcal{E}_1 расположен приемник P , сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Размер приемника мал по сравнению с шириной интерференционных полос на экране \mathcal{E}_1 . При равномерном движении приемника вдоль экрана (поперек интерференционных полос) приемник регистрирует переменный сигнал с частотой $f = 80$ Гц. Определите скорость U приемника.

Задача 5. Атом железа ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ ионизовали до такой степени, что вокруг ядра остался двигаться только один электрон. Определите энергию излучения этого атома при переходе электрона из состояния $n_2 = 2$ в состояние с $n_1 = 1$.

Задача 6*. В микрокалориметр теплоемкостью $C = 100$ Дж/град помещен образец изотопа ${}^{61}_{27}\text{Co}$, массой $m = 10$ мг. При распаде ядра этого изотопа выделяется энергия $W = 2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau = 50$ мин температура калориметра повышается на $0,06^\circ\text{C}$. Оцените период полураспада изотопа ${}^{61}_{27}\text{Co}$.

Постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$. (МФТИ-78)

Задача 7*. В кровь больного человека (её объем составляет 6 л) ввели 2 см^3 физиологического раствора радиоизотопа натрия ($T_{0,5} = 15$ ч). Через двое суток была взята проба крови объемом 1 см^3 . Её активность (число распадов ядер в единицу времени) оказалась равной $0,01$ расп/мин. Какова была активность раствора, введенного в организм больного?

Задача 8. Рубиновый лазер, работающий в импульсном режиме с длительностью импульса $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с, излучает параллельный пучок света с энергией $E = 1,0$ Дж. Определите силу F светового давления на шарик, освещаемый этим светом, если диаметр шарика равен (или больше) диаметру лазерного пучка, а поверхность шарика полностью поглощает падающее на неё излучение.

Задача 9. Свободный покоящийся атом водорода излучает фотон. Какой окажется длина волны де Бройля этого атома сразу после излучения фотона с длиной волны $0,486$ мкм?

Задача 10. Для измерения постоянной Планка катод K вакуумного фотоэлемента осветили монохроматическим светом (рис. 5) с длиной волны $\lambda = 0,62$ мкм. Фототок прекратился, когда в цепь между катодом K и анодом A подали задерживающую разность потенциалов V_s . Затем длину волны падающего излучения увеличили на 25%.

Чтобы в этом случае фототок появился, пришлось задерживающую разность потенциалов уменьшить на $0,4$ В. Исходя из этих данных определите постоянную Планка.

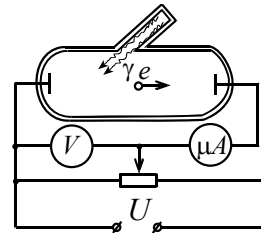


Рис. 5