ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

§ 5. Введение

К началу XX века накопилось большое количество экспериментальных данных о величине скорости света, и эти данные подвели учёных к неожиданному заключению.

Во всех инерцианальных системах отсчёта скорость света в вакууме одинакова. (I)

После этого ещё в течение нескольких десятилетий экспериментаторы совершенствовали технику и методику измерений, получая значение скорости света со всё большей точностью. Наконец в 1983 году на заседании Генеральной конференции по мерам и весам было принято решение считать величину скорости c света в вакууме равной 299792458 м/с точно.

Заключение (I) поставило перед научным миром массу задач. В ходе их разрешения была создана новая теория – *специальная теория относительности*, или сокращенно СТО.

В фундаменте СТО лежат два принципа:

1) принцип постоянства скорости света (I);

2) принцип относительности (II).

Современная трактовка принципа относительности имеет следующий вид.

Законы природы, по которым изменяются состояния физических систем не зависят от того, к какой инерциальной системе отсчёта относятся эти изменения. (II)

§ 6. Основные соотношения релятивистской динамики

Поскольку скорость света постоянна в любой инерциальной системе отсчёта (ИСО), логично выражать все другие скорости перемещения не в привычных нам единицах, например, метрах за секунду, а в долях от величины c.

Особенно удобно такое обозначение для скоростей, соизмеримых со скоростью света. Итак, определим безразмерную скорость так: $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$. Обозначим символом E полную энергию исследуемого нами материального объекта, а символом $\vec{p}$ – его импульс. Стрелка над значком p означает, что импульс – векторная величина.

Оказывается, между импульсом и энергией существует простая связь:

$$\vec{p} = \vec{\beta}\frac{E}{c}. \qquad (6.1)$$

По известному импульсу и энергии объекта можно легко определить его массу:

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}. \qquad (6.2)$$

В физике элементарных частиц импульс и массу удобно выражать в энергетических единицах. Импульс, выраженный в этих единицах, следует представить в виде $c\vec{p}$. Тогда формула (6.1) примет вид

$$c\vec{p} = \vec{\beta}E. \qquad (6.3)$$

Аналогичным образом, масса записывается как mc^2, а формула (6.2) принимает вид

$$mc^2 = \sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}. \qquad (6.4)$$

В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться именно таким представлением импульса и массы.

Для объектов, находящихся в состоянии покоя, $\beta = 0$. Следовательно, равен нулю и импульс (6.3). Обозначая энергию покоящегося тела символом E_0, мы из формулы (6.4) получим

$$mc^2 = E_0. \qquad (6.5)$$

Подчеркнём, что здесь масса m имеет такой же смысл, как и в ньютоновой механике, т.е. её величина не зависит от выбора ИСО.

Во многих отечественных школьных учебниках и в ряде научно-популярных книг понятие массы используется, по крайней мере, в двух смыслах:

а) масса – как масса покоящегося тела (её, как правило, обозначают символом m_0);

б) релятивистская масса.

Последняя обычно задаётся одним из двух соотношений:

$$M = \frac{E}{c^2}, \tag{6.6}$$

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.7}$$

Формулу (6.6) ввёл в употребление знаменитый французский математик и физик-теоретик Анри Пуанкаре в 1900 году, то есть задолго до создания СТО.

Формулу (6.7) широко использовал один из основоположников СТО – Альберт Эйнштейн. Но он же одним из первых (в 1948 г.) заметил: «Нехорошо вводить понятие массы тела $M = m\left[1 - v^2/c^2\right]^{-1/2}$, для которого нельзя дать ясного определения. Лучше не вводить никакой другой массы, кроме массы покоя m». Добавим, что сейчас в школьных учебниках физики в США, Англии и ряде других стран понятие массы вводится аналогично тому, как мы это сделали выше (формула (6.2)), а формулы (6.6) и (6.7) не употребляются.

Введённые нами понятие массы совпадает с определением массы покоя, но поскольку никаких других понятий массы мы не вводим, индекс «0» у символа массы не нужен.

Для изучения последующего материала введём еще два определения:

1) кинетической энергией $E_{кин}$ движущегося объекта будем называть разницу между его полной энергией и энергией покоя:

$$E_{кин} = E - E_0. \tag{6.8}$$

В задаче №6.2 мы покажем, что при малых скоростях это выражение совпадает с классической формулой для кинетической энергии;

2) релятивистским фактором (или Лоренц-фактором) называется коэффициент γ, показывающий во сколько раз энергия движущегося тела больше его энергии покоя:

$$\gamma = \frac{E}{E_0}. \tag{6.9}$$

Само собой разумеется, что всегда $\gamma \geq 1$.

Примечание. Релятивистский фактор определен только для объектов, обладающих массой.

Задача 6.1. Докажите, что β и γ взаимозависимые величины.

Решение. Подставим (6.3) и (6.5) в (6.4): $E_0^2 = E^2 - (\beta E)^2$

откуда $E^2(1-\beta^2) = E_0^2$, $\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$.

С учётом формулы (6.9) окончательно получим

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (6.10)$$

В дальнейшем, для избежания громоздких формул, мы часто будем использовать символ γ, определённый согласно (6.9) или (6.10).

Задача 6.2. Докажите, что при малых скоростях $(\beta << 1)$ формула (6.8) переходит в классическое выражение для кинетической энергии.

Примечание. В математике есть формулы для приближённого вычисления алгебраических выражений, содержащих малый параметр. Так, для чисел $x << 1$ и действительных a, таких что $ax << 1$, применима формула

$$(1+x)^a \approx 1 + ax. \qquad (6.11)$$

(Убедитесь в её справедливости на придуманных вами численных примерах.)

Решение. Выражение для кинетической энергии:

$$E_{\text{кин}} = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 = (\gamma - 1)E_0.$$

Согласно формулам (6.10) и (6.11)

$$\gamma - 1 = (1-\beta^2)^{-1/2} - 1 \approx \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) - 1 = \frac{\beta^2}{2}.$$

Отсюда

$$E_{\text{кин}} \approx \frac{\beta^2}{2} E_0 = \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 \frac{mc^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (6.12)$$

В заключение заметим, что энергии, с которыми приходится иметь дело в микромире, столь малы, что если их измерять в знакомых вам джоулях, придётся использовать множители, содержащие более десяти нулей. Поэтому были придуманы специальные единицы – электрон-вольты (сокращенно эВ). Известно, что минимальный свободный заряд, встречающийся в природе, равен заряду электрона $(e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})$. Частица с таким зарядом, преодолев разность потенциалов в один вольт, изменит свою энергию на 1эВ. Следовательно, $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}$. Кинетическая энергия «внешних» электронов в атоме обычно не превышает двух десятков электрон-вольт. Примерно такую же энергию необходимо затратить на то, чтобы «оторвать» от атома эти электроны.

§ 7. Законы сохранения

Начнём с энергии.

1. В любой ИСО энергия некоторой совокупности частиц (тел, объектов), не взаимодействующих на расстоянии как между собой, так и с внешним миром,

равна сумме энергий всех частиц, входящих в эту совокупность: $E_{\text{сист}} = \sum_i E_i$.

Величины, подчиняющиеся такому правилу, называются *аддитивными* (от латинского слова additivus – прибавляемый).

2. Во всем диапазоне скоростей исследуемых материальных объектов выполняется закон сохранения энергии. Иными словами, если мы сравним энергию системы частиц до и после их взаимодействия (под взаимодействием мы здесь понимаем упругие столкновения, распад), то оказывается справедливым следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{N_1} E_i = \sum_{k=1}^{N_2} E_k^{'} \tag{7.1}$$

Здесь N_1 – число частиц до взаимодействия, N_2 – после него. Вообще говоря, N_1 может отличаться от N_2 .

Заметим, что в общем случае необходимо учитывать ещё и потенциальную энергию U их взаимодействия. Например, энергия системы двух заряженных частиц

$$E_{\text{сист}} = E_1 + E_2 + U_{12} . \tag{7.2}$$

Перейдём к *импульсу*.

а) Импульс, как и энергия, обладает свойством аддитивности, т.е. импульс системы частиц равен векторной сумме импульсов частиц, входящих в эту сумму: $\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_i \vec{p}_i$.

б) Закон сохранения импульса имеет такой же вид как и в классической физике: $\sum_{i=1}^{N_1} \vec{p}_i = \sum_{k=1}^{N_2} \vec{p'}_k$.

§ 8. Дефект массы

Обычно у учащихся после изучения школьного курса физики создается впечатление, что дефект массы наблюдается только в ядерных или термоядерных реакциях. Это не так!

Дефект массы – самое заурядное и распространённое явление.

Задача 8.1. Ученик ФЗФТШ наливает в чайник из водопроводного крана 2 литра воды $\left(t = 14^\circ \mathrm{C}\right)$, ставит его на плиту и доводит до кипения. Предположим, что испарения не происходит. На сколько изменится масса воды в чайнике?

Решение. Согласно (6.4) $mc^2 = \sqrt{E^2 - (c\vec{p})^2}$, а так как $\vec{p} = 0$ (центр масс воды как до, так и после нагрева покоится), то $mc^2 = E$. Во время нагрева воды ей была передана дополнительная энергия $\Delta E = mc_{\text{в}}\Delta T$, где $c_B = 4{,}186\,\text{кДж}/\left(\text{кг}\cdot{}^{\text{o}}C\right)$ – удельная теплоёмкость воды. Тогда $\Delta mc^2 = \Delta E$. Относительное увеличение массы

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c_{\text{в}}\Delta T}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{4{,}186\cdot 10^3\cdot 86}{(3\cdot 10^8)^2} = 4\cdot 10^{-12}.$$

Для атомного ядра дефект массы даётся формулой

$$\Delta m_{\text{сист}} = Zm_{\text{p}} + Nm_{\text{n}} - m(Z,N),$$

где m_{p}, m_{n} и $m(Z,N)$ – масса протона, нейтрона и атомного ядра соответственно. Z и N – число протонов и нейтронов в атомном ядре.

Задача 8.2. Докажите, что масса атома водорода меньше суммы масс составляющих его протона и электрона. Считать, что скорость электрона в атоме мала $(\beta << 1)$.

Решение. Атом водорода – это связанная система. Согласно (6.4) и (7.2)

$$(E_{\text{p}} + E_{\text{e}} + U)^2 - (c\vec{p}_p + c\vec{p}_e)^2 = (m_{\text{H}}c^2)^2.$$

Здесь E_{p} – энергия протона, E_{e} – энергия электрона, а m_{H} – масса атома водорода.

По условию задачи атом водорода можно считать покоящимся, т.е. $c\vec{p}_{\text{p}} + c\vec{p}_{\text{e}} = 0$. Из этих формул следует $E_{\text{p}} + E_{\text{e}} + U = m_{\text{H}}c^2$, или с учётом (6.8),

$$m_{\text{p}}c^2 + E_{\text{кин(p)}} + m_{\text{e}}c^2 + E_{\text{кин(e)}} + U = m_{\text{H}}c^2. \tag{8.1}$$

Поскольку $\beta << 1$, кинетическая энергия каждой из частиц может быть вычислена по классической формуле. Поскольку

$$\frac{E_{\text{кин(p)}}}{E_{\text{кин(e)}}} = \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{p}}} \approx 5\cdot 10^{-4} << 1, \tag{8.2}$$

кинетической энергией протона можно пренебречь. Дефект массы атома водорода $\Delta m = (m_{\text{p}} + m_{\text{e}}) - m_{\text{H}}$. Тогда с учётом условия (8.2) формулу (8.1) можно представить в виде

$$\Delta mc^2 = -U - E_{\text{кин(e)}}. \tag{8.3}$$

Величина $E_{\text{св}} = -U - E_{\text{кин(e)}}$ называется энергией связи электрона с ядром (рис. 8.1). Численно она равна энергии, которую нужно затратить на ионизацию атома водорода.

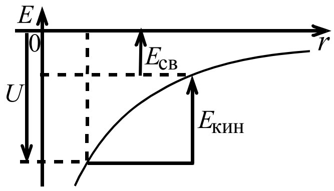

Рис. 8.1

Потенциальная энергия атома водорода обусловлена кулоновским взаимодействием электрона с протоном. Она отрицательна и может быть найдена по известной формуле:

$$U = -k\frac{e^2}{r}\ . \tag{8.4}$$

В этих же обозначениях закон Кулона имеет вид $F = k\frac{e^2}{r^2}$.

Здесь e – модуль заряда электрона или протона, а k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Предположим, что электрон движется по круговой орбите радиуса r. Его центростремительное ускорение обеспечивается кулоновским притяжением: $m_{\text{e}}\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}$.

Последнюю формулу легко привести к виду

$$2\left(\frac{m_{\text{e}}v^2}{2}\right) = k\frac{e^2}{r}. \tag{8.5}$$

С учётом (8.4) получается

$$2E_{\text{кин(е)}} = -U. \tag{8.6}$$

Подстановка (8.6) в (8.3) даст $\Delta mc^2 = E_{\text{кин}}$ или с учётом (6.12)

$$\Delta mc^2 = \frac{m_{\text{e}}v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = m_e\frac{\beta^2}{2}.$$

Примечание. В дальнейшем мы покажем, что максимальная скорость электрона, движущегося по круговой орбите в атоме водорода, равна $\beta = 1/137$, откуда $\Delta m / m_{\text{e}} \approx 3\cdot 10^{-5}$.

