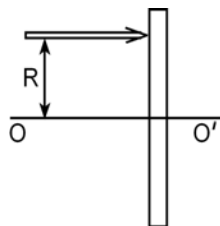


ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Введение

В 1993 году на вступительных экзаменах в МФТИ абитуриентам была предложена следующая задача.



Задача 1. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 3$ мм падает узкий пучок монохроматического света (рис. 1.1). Пучок параллелен оптической оси OO' , которая перпендикулярна пластинке и проходит через её центр. Расстояние R между пучком и осью OO' равно 3 см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света имеет радиальную зависимость:

Рис. 1.1

$$n(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (1.1)$$

где n_0 и r_0 – постоянные ($n_0 = 1,5$, $r_0 = 9$ см). Определить угол между выходящим пучком и осью OO' .

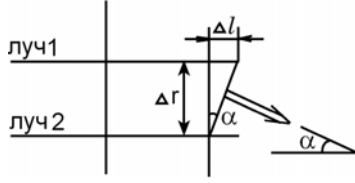
Большая часть абитуриентов при решении этой задачи рассуждала примерно так: «Выделим небольшой участок пластинки в окрестности вошедшего в неё светового пучка. Пластинку можно рассматривать как слоистую среду с показателем преломления, медленно меняющимся от слоя к слою. Поскольку световые лучи параллельны, то вдоль пути любого из лучей показатель преломления не меняется, а, следовательно, не отклоняется и луч».

Увы! Эти рассуждения ошибочны.

В данной задаче мы столкнулись с ситуацией, когда понятие светового луча в той формулировке, которую мы дали в предыдущем задании, требует уточнения. Ведь свет имеет *двойственную* природу. Его можно рассматривать не только как поток частиц (фотонов), но и как систему *электромагнитных волн*. Для видимого света частота изменения поля в такой волне лежит в пределах от $0,38 \cdot 10^{15}$ Гц до $0,86 \cdot 10^{15}$ Гц.

При переходе света из воздуха в стекло происходит изменение длины световой волны (волновое возмущение). Назовём границу волнового возмущения *волновым фронтом* (ВФ) (точное определение ВФ см. в §2). Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка ВФ сама становится источником сферических волн. Эти вновь образовавшиеся волны называются вторичными или элементарными. Огибающая, проведённая по границе вторичных волн, даёт новое положение ВФ. Таким образом, можно воспроизводить ВФ в самых удалённых точках пространства. В любой точке ВФ можно построить нормаль к нему. Она-то (нормаль) и является образом *светового луча*, моделью, позволяющей следить за распространением участка ВФ.

Решение. До известной степени можно следовать логике абитуриентов, приведённой на стр. 3. Допустим, что в пластинке лучи 1 и 2 распространяются параллельно главной оптической оси. На прохождение сквозь неё лучам потребуется время $t_1 = H/v_1 = Hn_1/c$ и $t_2 = Hn_2/c$ соответственно.



Поскольку $n_2 > n_1$, то $t_2 > t_1$. Значит, за то время $\Delta t = t_2 - t_1$, которое луч 2 будет заканчивать свой путь в пластинке, луч 1 пройдёт в воздухе расстояние

Рис. 1.2

дёт в воздухе расстояние

$$\Delta l = c\Delta t = H(n_2 - n_1) \cong -H \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R} \Delta r, \quad (1.2)$$

где Δr – ширина светового пучка.

Теперь пора вспомнить об определении волнового фронта. На выходе из пластинки он отклонится вниз, к главной оптической оси, на угол $\alpha \approx \frac{\Delta l}{\Delta r}$

(см. рис. 1.2). С учётом (1.2) получим

$$\alpha = -H \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R} = 2n_0 H \frac{R}{r_0^2} = \frac{1}{30} \text{ рад.}$$

В заключение введения обсудим границы применимости приближения геометрической оптики. В ряде учебников в качестве условия применимости этого приближения приводят неравенство:

$$D \gg \lambda, \quad (1.3)$$

где D – характерный поперечный размер оптических элементов, λ – длина световой волны. Сразу скажем, что **в общем случае это условие применять нельзя!**

Рассмотрим простейший пример. Пусть на диафрагму диаметром D падает плоский волновой фронт монохроматического излучения с длиной волны λ . В этом случае за диафрагмой волна станет расходящейся из-за дифракции на диафрагме, причём угол расходимости

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (1.4)$$

Введём расстояние r_0 так, что

$$r_0 \cdot \theta = D. \quad (1.5)$$

На этом расстоянии от диафрагмы ширина пучка удвоится. Из (1.5) и (1.6) следует:

$$r_0 = \frac{D^2}{\lambda}. \quad (1.6)$$

Понятно, что на расстоянии $r \gg r_0$ размер освещённой области экрана будет определяться дифракцией света, поэтому приближение геометрической оптики заведомо не работает. В случае же $r \ll r_0$ – этим приближением можно пользоваться.

§ 2. Плоские и сферические волны

Плоскими называются волны, у которых направление распространения одинаково во всех точках пространства. Рассмотрим плоскую незатухающую синусоидальную волну, распространяющуюся в заданном направлении (вдоль оси OX). Выберем некоторую точку пространства. Пусть $A(t)$ – текущее отклонение «высоты» волны от её среднего значения. Эта величина может быть описана с помощью уравнения

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.1)$$

где A_0 – амплитуда волны, φ_0 – её фаза, соответствующая началу отсчёта времени t , а ω – круговая частота, связанная с обычной частотой f соотношением $\omega = 2\pi f$.

Если бы в некий момент времени t_1 удалось остановить волну («вморозить» её в пространство), то отклонение A волны от среднего уровня изменялось бы при переходе от одной точки пространства к другой. Тогда, смещаясь в положительном направлении оси OX вдоль «замороженной» волны, мы обнаружим закономерность изменения высоты волны:

$$A(x) = A_0 \sin(\omega t_1 + \varphi_0 - kx), \quad (2.2)$$

где $k = 2\pi / \lambda$ – пространственная частота (часто параметр k называют волновым числом), λ – длина волны, а kx – набег фазы на длине x .

«Разморозим» волну. Для произвольной точки оси x и произвольного момента времени t «высота» волны будет определяться уравнением

$$A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.3)$$

Если волна распространяется от точечного источника, то её называют сферической. Математическое представление сферической волны отличается от такового для плоской тем, что амплитуда сферической волны зависит от расстояния до источника этой волны: $A(r) = \frac{C}{r}$, где r – расстояние от источника до точки наблюдения, а C – постоянная величина, определяемая из на-

чальных условий задачи. Заметим, что такое представление амплитуды верно для расстояний $r \gg \lambda$.

Следует также иметь в виду, что соответствующим выбором начала отсчёта времени можно избавиться от начальной фазы φ_0 или в уравнении (2.3) перейти от функции \sin к функции \cos .

С учётом сказанного выше уточним понятие волнового фронта (ВФ) и дадим его строгое определение.

Волновым фронтом называется воображаемая поверхность, во всех точках которой в фиксированный момент времени волна имеет одинаковую фазу.

§ 3. Сложение амплитуд монохроматических когерентных волн

Мы не станем решать задачу о сложении колебаний в общем виде, а рассмотрим лишь один частный случай, когда суммируемые волны распространяются вдоль общей оси и имеют одинаковые амплитуды. Разумеется, длины этих волны одинаковы (говорят, что эти волны монохроматические). Кроме того, будем считать, что точка наблюдения и источники обеих волн неподвижны. Тогда слагаемое $\varphi_0 - kx$ в выражении (2.3) для каждой из волн можно заменить новым значением фазы. При этом амплитуда суммарной волны будет равна

$$A_{\text{общ}}(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) + A \sin(\omega t + \varphi_2).$$

По известной из тригонометрии формуле для суммы синусов получим:

$$A_{\text{общ}}(t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (3.1)$$

Легко видеть, что амплитуда результирующей волны определяется выражением:

$$A_0 = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right), \quad (3.2)$$

и в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ может изменяться в пределах от нуля до $2A$. Хорошенько запомните формулу (3.2). Её важность вы по достоинству оцените при решении задач этого задания.

Примечание. В формуле (3.2) разность фаз не зависит от времени. Такого рода колебания называются *когерентными*. В реальности у излученной волны всегда есть начало и конец, т.е. волна излучается в виде куска. Такой кусок волны называется *цугом*. Обычно цуги волн излучаются хаотично. За время наблюдения испускается большое число цугов. Такие волны некогерентны и их взаимного усиления или ослабления (*интерференции*) не наблюдается. Для наблюдения интерференции используют специальные интерференционные схемы, в

которых из одного источника получают два когерентных. Эти два источника могут быть оба мнимыми или один действительный, а другой мнимый.

Задача 2. Для уменьшения доли отражённого света от поверхности стекла на неё наносят тонкую плёнку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (так называемое просветление оптики). Пусть на стекло падает излучение двух длин волн: $\lambda_1 = 700$ нм и $\lambda_2 = 420$ нм. Какой наименьшей толщины h плёнку с показателем преломления $n = 4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) лучей, отражённый свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?

Решение. Согласно формуле (3.2), амплитуда отражённого сигнала будет минимальной, если при суммировании волн, отражённых от верхней и нижней поверхностей плёнки (свет распространяется от двух мнимых источников), будет выполняться соотношение

$$2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0,$$

что эквивалентно условию $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, где m – целое число.

Разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = kx$ (см. комментарий к формуле (2.2)). В данном случае $x = 2h$, поскольку волна, проникшая в плёнку, проходит сквозь неё туда и обратно.

Так как падающий свет состоит из излучения на двух длинах волн, необходимо погасить обе отражённые волны.

$$\begin{cases} k_1 h = \frac{2\pi h}{\lambda_{1\text{стекло}}} = \frac{\pi}{2} + m_1\pi, & \lambda_{1\text{стекло}} = \frac{\lambda_1}{n}, \\ k_2 h = \frac{2\pi h}{\lambda_{2\text{стекло}}} = \frac{\pi}{2} + m_2\pi, & \lambda_{2\text{стекло}} = \frac{\lambda_2}{n}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решая эту систему, получим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m_2 + 0,5}{m_1 + 0,5}. \quad (3.4)$$

С другой стороны,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{700 \text{ нм}}{420 \text{ нм}} = \frac{5}{3}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует $5m_1 + 1 = 3m_2$. Наименьшие m_1 и m_2 , для которых выполняется это равенство, таковы: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Отсюда находим h (можно использовать любое из двух уравнений системы (3.3)): $h \approx 394 \text{ нм}$.

§ 4. Интерференция волн

Определение. Под *интерференцией* волн понимают взаимное усиление или ослабление двух (или большего числа) волн при их наложении друг на друга в процессе одновременного распространения в пространстве.

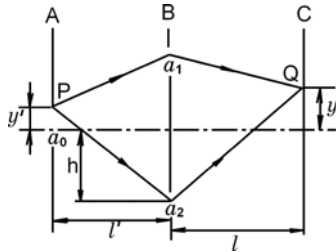


Рис. 4.1

По существу, при интерференции волн интенсивность суммарной волны $I \propto A^2$ не равна сумме интенсивностей исходных волн. Это хорошо видно из формулы (3.2), где $\max I_{\text{общ}} = 4I_0$. Этот результат противоречит постулату №3 геометрической оптики. Но в физической (волновой) оптике не выполняется и постулат №1 (стр. 3 задан. 5).

Ярким и поучительным примером интерференции волн может служить *опыт Юнга*. На примере этого опыта становится ясно, почему так сложно обнаружить интерференцию световых волн в обычных жизненных ситуациях. Схема опыта приведена на рис. 4.1. Свет от монохроматического источника освещает щель a_0 на экране A .

Длинная сторона щели перпендикулярна плоскости рисунка. Интерференционная картина наблюдается на экране C . Между точками A и C расположен экран B с двумя щелями a_1 и a_2 , параллельными щели a_0 и симметрично отстоящими от оси системы на расстояние h . Расстояние между экранами A и B равно l' , а между B и C равно l . Рассмотрим, что будет происходить со световыми волнами в этой установке. Возьмём какую-либо точку P щели на экране A , находящуюся на расстоянии y' от оси установки. Посмотрим, какое возмущение создаёт свет, исходящий из точки P в некоторой точке Q экрана C , находящейся на расстоянии y от оси системы. *Разность хода* ΔS в лучах света, пришедших в точку Q через щели a_1 и a_2 , равна

$$\Delta S = (Pa_2 + a_2Q) - (Pa_1 + a_1Q).$$

Как нетрудно убедиться, $(Pa_1)^2 = l'^2 + (h - y')^2$, $(Pa_2)^2 = l'^2 + (h + y')^2$. Отсюда $(Pa_2)^2 - (Pa_1)^2 = (Pa_2 + Pa_1)(Pa_2 - Pa_1) = 4hy'$.

Если мы предположим, что $y' \ll l'$ и $h \ll l'$, а правомерность такого предположения (и с большим запасом) будет очевидна из дальнейшего, то сумму $Pa_2 + Pa_1$ мы смело можем положить равной $2l'$. Тогда $(Pa_2 - Pa_1) = 2hy'/l'$. Аналогично найдём и $(a_2Q - a_1Q)$.

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{2hy'}{l'} + \frac{2hy}{l}. \quad (4.1)$$

В точке Q будет наблюдаться максимум интерференционной картины, если разность хода ΔS составляет целое число длин волн (см. формулу (3.2)).

Минимум интерференционной картины будет наблюдаться тогда, когда эта разность равна $(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, где m – любое целое число, включая и 0.

Если мы будем перемещать по экрану C точку наблюдения Q (при неизменном положении P), то получим картину

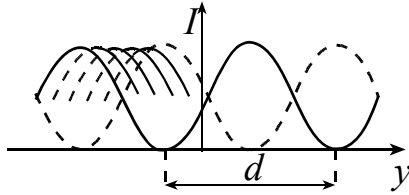


Рис. 4.2

освещённости на экране C примерно такого вида, как показано сплошной кривой на рис. 4.2. То есть на экране C будет наблюдаться система равноотстоящих друг (от друга *экви-дистантных*) полос. Рас-

стояние d между этими полосами найдём

из (4.1):

$$\lambda = \frac{2hd}{l} \Rightarrow d = \frac{l\lambda}{2h}. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) может быть представлена в виде

$$d = \frac{\lambda}{\Omega}, \quad (4.3)$$

где Ω – угол, под которым из точки экрана, в которой наблюдается интерференция, видны источники излучения. В опыте Юнга под таким углом видны отверстия в экране B из центральной точки экрана C :

$$\Omega = \frac{2h}{l}.$$

Посмотрим, что произойдёт с этой картиной, если мы сместим точку P на некоторое расстояние $\delta y'$. Как нетрудно видеть из (4.1), соответствующая точка картинки (т.е. точка, для которой разность хода ΔS остаётся неизмен-

ной) сместится на расстояние δy , определяемое соотношением

$$\frac{\delta y'}{l'} = -\frac{\delta y}{l}.$$

В частности, для того, чтобы на экране C точка максимума интенсивности (см. рис. 4.2) оказалась на месте минимума, т.е. на расстоянии $\delta y = \frac{\lambda l}{4h}$,

нужно сместить точку P на расстояние

$$\delta y' = -\frac{l'}{l} \delta y = -\frac{l' \lambda}{4h} = \Delta. \quad (4.4)$$

Из (4.2) и (4.4) следует, что если щель на экране A будет иметь ширину $D \geq \Delta$, то на экране C каждая точка входной щели экрана A даст свою интерференционную картину, и все они разместятся между сплошной и пунктирной линиями (см. рис. 4.2). Таким образом, на экране C вместо интерференционной картины появится область с равномерной засветкой. (Более строгое рассмотрение показывает, что интерференционная картина исчезает при $D = 2\Delta$.) Следовательно, максимальная ширина входной щели, при которой исчезает интерференционная картина, тем больше, чем меньше расстояние между щелями на экране B и чем больше расстояние между экранами.

Сделаем некоторые оценки. Для видимого света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см положим $l = l' = 2 \cdot 10^2$ см, а $2h = 10^{-1}$ см. Тогда $\Delta = 5 \cdot 10^{-2}$ см = 0,5 мм. То есть при вполне приличных размерах всей установки (порядка 4 метров) и минимальном расстоянии между щелями на экране B порядка 1 миллиметра (сами щели, естественно, еще меньше), интерференционная картина исчезает уже при размерах щели на экране A приблизительно равных 0,5 мм. Кроме того, приведённые оценки убеждают нас в правомочности использованного приближения $Pa_1 + Pa_2 = 2l'$.

Предложенные выше оценки помогают понять, почему в обычных условиях так нелегко наблюдать интерференционные явления. Но и это ещё не всё. Период «гребёнки» интерференционных полос на рис. 4.2 определяется при прочих равных условиях длиной волны света. Но если источник света *не* строго монохроматичен, то для разных длин волн масштабы этих «гребёнок» будут различны, и рано или поздно максимум интерференционной картины для одной длины волны придёт на минимум другой. А это означает, что в этом месте интерференционная картина исчезает. Полученные результаты легко обобщить на любые другие двухлучевые интерференционные установки.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Точечный монохроматический источник света S равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеются два маленьких отверстия на расстоянии a друг от друга; расстояние от траектории источника до плоскости равно l' (рис. 4.3). Приёмник света A расположен на оси системы и регистрирует периодически изменяющуюся освещённость. Определите скорость v движения источника S , если частота колебаний интенсивности $f = 15$ Гц. Длина волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $a = 2$ мм, $l' = 1$ м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы. (МФТИ, 1981)

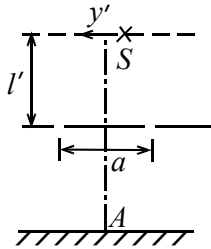


Рис. 4.3

Решение. Период T колебаний интенсивности света в приёмнике A равен $T = 1/f$. За время T источник S сместится на расстояние $\delta y' = vT$. При этом интерференционная картина сдвинется на ширину одной полосы, т.е. на величину $\delta y = d$. Согласно (4.3) $d = \lambda/\Omega$. Если через l обозначить расстояние от плоскости до приёмника, то $\Omega = a/l$. Таким образом, используя (4.4), получим

$$vT = -\frac{l' \lambda}{l \Omega} = -\frac{l' \lambda l}{l a} = -\frac{l' \lambda}{a}. \text{ Откуда } v = -\frac{l' \lambda f}{a}.$$

Знак «минус» указывает на то, что интерференционная картина смещается в сторону, противоположную направлению движения источника S . Модуль скорости v равен $|v| = 4,5 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Задача 4. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения зависимости показателя преломления газов от давления по смещению интерференционной картины. Для этого на пути одного из интерференционных лучей ставится кювета Γ прямоугольной формы длиной $L = 10$ см с исследуемым газом (рис. 4.4), а на

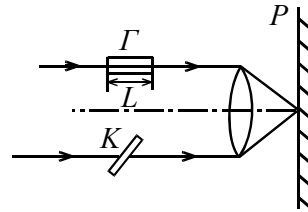


Рис. 4.4

пути другого – стеклянный компенсатор K , с помощью которого добиваются, чтобы в центре интерференционной картины разность хода между интерферирующими лучами равнялась нулю. Какое минимальное изменение показателя преломления Δn можно измерить в таком приборе? Считать, что минимальное надёжно регистрируемое смещение интерференционной картины в плоскости наблюдения P соответствует появлению на месте центрального

максимума первого минимума. Наблюдение ведётся на длине волны $\lambda = 0,6$ мкм . (МФТИ, 1991)

Решение. Изменение фазы луча, на пути которого стоит кювета, равно $\Delta\varphi = \Delta n L k$.

Условие появления на месте центрального максимума первого минимума,

согласно (3.2), есть $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi$

Или $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n L = \pi \Rightarrow \Delta n = \frac{\lambda}{2L} \Rightarrow \Delta n = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{2 \cdot 0,1 \text{ м}} = 3 \cdot 10^{-6}$.