§ 6. Несколько более сложных задач об остатках

Идеи, связанные с изучением остатков, которые использовались выше, например, при решении задач на делимость, уравнений в целых числах или обсуждении признаков делимости, можно развить. Соответствующий раздел теории чисел называется теорией сравнений. Эти сравнения выходят за рамки нашего задания (интересующиеся могут обратиться к книгам и статье [2,5,7,9] из списка литературы). Однако мы разберем несколько задач, используя рассмотрение остатков.

Начнём с подготовительного примера.

Пример 30. Найти остатки от деления на 3 чисел вида $2n^2 + 1$ для всевозможных натуральных чисел n.

Решение. Если n делится на 3, то остаток от деления на 3 равен 1, как видно из определения деления с остатком.

Допустим, n не делится на 3. В этом случае n имеет вид $n = 3k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$, $2n^2 + 1 = 18k^2 \pm 12k + 3$, так что число $2n^2 + 1$ делится на 3.

Ответ: Остаток равен 1, если n кратно 3, и 0, если n не кратно 3.

Пример 31. Найти все простые числа p, для которых число $2p^2 + 1$ простое.

Решение. Из примера 35 вытекает, что для всех простых чисел $p > 3$ число $2p^2 + 1$ делится на 3, т.е. является составным. Следовательно, число $2 \cdot 3^2 + 1 = 19$ – единственное простое число вида $2p^2 + 1$.

Ответ: $p = 3$.

Чтобы узнавать остатки от деления степеней натуральных чисел, полезно решить следующую задачу.

Задача 32. Пусть *a, m* – целые числа и $a = r + mq$ (*q* целое). Доказать, что для любого натурального числа *k* верно равенство $a^k = r^k + ms$, где число *s* целое.

Решение. Применим метод математической индукции.

Для $k = 1$ утверждение верно по условию. Допустим, что для некоторого натурального числа *k* равенство $a^k = r^k + ms$ верно.

Тогда $a^{k+1} = (r + mq)(r^k + ms) = r^{k+1} + m(qr^k + rs + mqs)$. Согласно принципу индукции, равенство верно для всех $k = 1,2,\dots$

Пример 33. Выяснить, существует ли такое натуральное число *n*, что $2011^{2011} + 2009^{2010} = n^2$.

Решение. Будем рассматривать остатки от деления на 3. Так как 2010 делится на 3, то $2010 = 3q$ (*q* натуральное), поэтому $2011 = 1 + 3q$, $2009 = -1 + 3q$. Отсюда с помощью задачи 37 получаем: $2011^{2011} = 1^{2011} + 3s = 1 + 3s$ и $2009^{2010} = (-1)^{2010} + 3t = 1 + 3t$ (*s*, *t* целые). Следовательно,

$$2011^{2011} + 2009^{2010} = 2 + 3(s + t) = 2 + 3u, u = s + t .$$

Допустим, что $2011^{2011} + 2009^{2010} = n^2$ для некоторого натурального *n*, тогда $2n^2 + 1 = 2(2 + 3u) + 1 = 3(2u + 1) + 2$. Это противоречит результату примера 35.

Ответ: такое натуральное число не существует.

В заключение приведём без доказательства теорему, полезную при решении задач на делимость степеней. Она известна как *малая теорема Ферма.*

Малая теорема Ферма. Пусть *p* — простое число, *a* — натуральное число. Если *a* не делится на *p,* то $a^{p-1} - 1$ делится на *p* (то есть $a^{p-1} = 1 + pq$, *q* натуральное).

Пример 34. Показать, что число $n^{13} - n$ делится на 13 при любом натуральном *n*.

Решение. Если *n* кратно 13, то данное утверждение очевидно. Допустим, что *n* не делится на 13. По малой теореме Ферма для $p = 13$ получим, что число

$n^{12}-1$ делится на 13, следовательно, $n^{13}-n=n(n^{12}-1)$ также делится на 13, что и требовалось доказать.

Решим следующую задачу при помощи малой теоремы Ферма.

Пример 35. Доказать, что число $216^{321}+321^{216}$ делится на 7.

Решение. Так как $p=7$ простое число, то, согласно малой теореме Ферма, $216^6=1+7q, 321^6=1+7s$. Разделим 321 на 6: $321=53\cdot 6+3$ и применим результат задачи 37: $216^{321}=(216^6)^{53}\cdot 216^3=(1+7t)\cdot 216^3$

$216^6\equiv 1(mod7)$ и $321^6\equiv 1\ (mod7)$. Кроме того, $216=217-1=7\cdot 31-1\Rightarrow$ $216^3=7u-1$ и $216^{321}=(1+7t)\cdot(7u-1)=7(u-t+ut)-1=7w-1$.

Далее, $216=6\cdot 36$, поэтому $321^{216}=(321^6)^{36}=(1+7s)^{36}=1+7v$ (mod 7).

Складывая равенства $216^{321}=7w-1$ и $321^{216}=1+7v$, получаем $216^{321}+321^{216}=7(v+w)$, что и требовалось доказать.

Следующую задачу также можно решить при помощи малой теоремы Ферма, хотя на вступительном экзамене, разумеется, этого не предполагалось.

Пример 36. (МФТИ, 2002) Найти последнюю цифру и остаток от деления числа $a=3^{2002}+7^{2002}$ на 11.

Решение. Последние цифры последовательных степеней натурального числа периодически повторяются, причём период не превосходит количества десятичных цифр, т.е. 10. Установим это экспериментально; при подсчётах на каждом шаге достаточно умножать только последнюю цифру предыдущего произведения. Убедимся, что у чисел 3^k и 7^k последние цифры переодически повторяются: $3^1=\underline{3}, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81, 3^5=24\underline{3}, \ldots$

$$7^1=\underline{7}, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401, 7^5=1680\underline{7}.$$

В обоих случаях последние цифры повторяются с периодом 4, а т.к. $2002=4\cdot 500+2$, то легко насчитать, что последние цифры у обеих степеней 9, а их у суммы – 8.

Остатки степеней числа a при делении на p также периодически повторяются, причём период не превосходит $p-1$.

Убедитесь, что период остатков при делении на 11 для основания 3 равен 5, а для основания 7 равен 10.

Значит, у 3^{2002} остаток от деления на 11 такой же, как у 3^2, т.е. 9, а у 7^{2002} такой же, как у 7^2, т.е. 5, а у их суммы такой же, как у $9+5=14$, т.е. 3.

Ответ: последняя цифра 8, остаток 3.