§ 5. Решение уравнений в целых числах

В решении даже таких простейших уравнений, как линейное уравнение с одним неизвестным, есть свои особенности, если коэффициенты уравнения являются целыми числами, и требуется найти целочисленные решения.

5.1. Линейное уравнение с одним неизвестным *ax* = *b* (1), где a, b – целые числа, $a \neq 0$, можно привести к виду, где $a > 0$ (при необходимости умножив обе части на (–1)). Оно имеет единственное целое решение $x = b/a$, если a – делитель b, и не имеет целочисленных решений в противном случае.

Пример 24. Квадратные мраморные плитки были приготовлены, чтобы покрыть прямоугольную площадку размерами $2n + 1$ на $n + 2$ плиток (n – натуральное число). Затем решили использовать эти плитки на площадке шириной $n + 4$ плитки. Возможно ли это, и сколько плиток при этом уложится в ряд?

Решение. Если x – длина ряда плитки, то общее количество плиток равно $x(n+4)=(2n+1)(n+2)$ так что $x = \dfrac{(2n+1)(n+2)}{n+4}$ при условии, что значение дроби равно целому числу. Найдём, при каком n это возможно. Разделим числитель дроби на знаменатель с остатком. Для этого раскроем скобки в числителе: $(2n+1)(n+2) = 2n^2+5n+2$. Положим $t = n + 4$, так что $n = t-4$, и подставим в выражение числителя:

$$2n^2+5n+2 = 2(t-4)^2+5(t-4)+2 =$$

$$= 2t^2-16t+32+5t-20+2 = 2t^2-11t+14.$$

Получим $x = \dfrac{t(2t-11)+14}{t} = 2t-11+\dfrac{14}{t} = 2n-3+\dfrac{14}{n+4}$.

Число $2n – 3$ целое при натуральном n, поэтому x может быть натуральным, если 14 делится на $n + 4$, а это возможно в двух случаях: при $n + 4 = 7$, $n = 3$, тогда $x = 6 – 3 + 2 = 5$, и при $n + 4 = 14$, $n = 10$, тогда $x = 20 – 3 + 1 = 18$.

Ответ: 7×5 при $n = 3$ или 14×18 при $n = 10$.

Уравнения в целых числах с двумя и более неизвестными рассматривал в своем произведении «Арифметика» Диофант (III в н. э.). В его честь целочисленные уравнения обычно называют диофантовыми. Самое известное из них:

– 5.2. Линейное уравнение с двумя неизвестными: $\boldsymbol{ax + by = c}$ **(2)**, где a, b, c – данные целые числа, причём $ab \neq 0$ (иначе это уравнение с одним неизвестным).

Пример 25. Показать, что любую сумму (в рублях), кроме 1 и 3 рублей, можно заплатить монетами по 2 и 5 рублей, а если допустить сдачу (теми же монетами) – то вообще любую.

Решение. Пусть требуется заплатить n рублей x монетами по 2 рубля и y монетами по 5 рублей (x, y – целые числа, отрицательное значение x или y указывает, что получена сдача), тогда составим уравнение $2x + 5y = n$.

Если $(x; y)$ решение, то $x = \dfrac{n-5y}{2}$, $n - 5y$ должно делиться на 2. Ввиду взаимной простоты 2 и 5, это будет выполнено, если y одинаковой чётности с n. При $n = 1$ или 3 подойдёт $y = -1$, $x = 3$ или 4 соответственно (т.е. заплатить 3 или 4 монеты по 2 рубля и взять сдачу 5 рублей), при $n = 2k$ достаточно $y = 0$, $x = k$. Если же $n \geq 5$ нечётное, можно взять $y = 1$, тогда получим $x \geq 0$.

Возвращаясь к общему случаю, найдём, при каких условиях на коэффициенты уравнение (2) может иметь целочисленное решение.

Например, уравнение $2x - 4y = 21$ не имеет решений, так как левая часть делится на 2, а правая не делится.

Теорема. ***Уравнение* (2) *тогда и только тогда имеет целочисленное решение* $(x; y)$, *когда* c *делится на* НОД(a, b).**

Это условие выполнено, если a и b взаимно простые, как было в примере 26.

Допустим, что **НОД$(a, b) = d$,** так что $a = da_1, b = db_1,\ c = dc_1$, причём a_1 и b_1 взаимно простые. Разделив уравнение (2) на d, получим уравнение $a_1x + b_1y = c_1$ с взаимно простыми a_1, b_1.

Найти хотя бы одно решение уравнения $ax + by = c$ с взаимно простыми a, b можно методом, применённым при решении примера 26: выразить y через x или наоборот: $y = \dfrac{c - ax}{b}$. Так как **НОД$(a, b) = 1$,** то найдутся такие целые числа u, v, что $au + bv = 1$ (см. примечание к алгоритму Евклида после примера 22). Умножив обе части уравнения на c, получим $auc + bvc = c$, так что уравнение имеет хотя бы одно решение $x_1 = uc,\ y_1 = vc$. Это показывает, что найдётся целое значение x_0, при котором $y_0 = \dfrac{c - ax_o}{b}$ также будет целым. Пара $(x_0; y_0)$ будет решением уравнения (2).

Зная одно (так называемое «частное») решение, можно найти все решения уравнения $ax + by = c$ с взаимно простыми *a*, *b*. Пусть $(x; y)$ – произвольное решение, а $(x_0; y_0)$ – частное решение. Вычтем почленно из равенства $ax + by = c$ равенство $ax_0 + by_0 = c$, получим $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, т.е. $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ – решение

соответствующего однородного уравнения $aX + bY = 0$ **(3).**

Перенесём bY в правую часть равенства (3): $aX = -bY$. Так как X, Y целые числа, то aX делится на b; по свойству 5 делимости, X делится на b, в силу взаимной простоты a, b, т.е. $X = bt$ для подходящего целого t, откуда $Y = -at$. Итак, любое решение уравнения (2) находится по формулам

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at, \ t \in Z \end{cases} \qquad (4)$$

Пример 26. Найти все целочисленные решения уравнения $5l - 3k = 1$ (это уравнение встретилось в примере 26).

Решение. Выразим, например, k через l: $k = \dfrac{5l - 1}{3}$. Сразу видно, что при $l = 2$ получим $k = 3$; мы нашли частное решение $l_0 = 2$, $k_0 = 3$. Теперь запишем $5l - 3k = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3,\ 5(l - 2) - 3(k - 3) = 0.$ Нам остается решить однородное уравнение $5X - 3Y = 0,\ 5X = 3Y$, где $X = l - 2, Y = k - 3$. Так как числа 5 и 3 взаимно простые, отсюда следует, что X делится на 3, а Y делится на 5, так что $X = 3t, Y = 5t, t \in \mathbb{Z}$. Окончательно, $\begin{cases} l = 2 + 3t \\ k = 3 + 5t, \ t \in Z \end{cases}$.

Примечание. Тем самым мы нашли все x, удовлетворяющие требованию примера 20: $5x = 1 + dk = 1 + 23(3 + 5t) = 70 + 23 \cdot 5t, x = 14 + 5t, t \in Z$.

5.3. Примеры решения нелинейных уравнений

Уравнения $P = c$, где P – многочлен с целыми коэффициентами от одной или нескольких неизвестных и *без свободного члена*, а c – целое число, часто решают, разлагая левую и правую части на множители с целыми коэффициентами и используя единственность разложения из основной теоремы арифметики.

Пример 27. Найти все целые корни уравнения $x^3 - 4x = 15$.

Решение. Левую часть разложим на множители: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = (x - 2)x(x + 2) = 15$. В разложении числа 15 на три различных сомножителя обязательно участвует 1. Возможны варианты: $x - 2 = 1$, $x = 3$, $x + 2 = 5$ или $x - 2 = -5$, $x = -3$, $x + 2 = -1$, но тогда произведение равно – 15. Значит, других целых корней это уравнение не имеет.

Ответ: $x = 3$.

Пример 28. Найти все решения уравнения $4x^2 - y^2 = -4$ в целых числах.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:
$4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$. $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y) = -4$. Так как x и y – целые числа, то $(2x - y)$, $(2x + y)$ также целые числа, произведение которых равно – 4. Таким образом, получаем 6 систем уравнений, различающихся только правыми частями. Поэтому запишем все их вместе:

$$\begin{cases} 2x - y = -1; \quad 1; -4; \quad 4; \quad 2; -2 \\ 2x + y = \quad 4; -4; \quad 1; \ -1; -2; \quad 2 \end{cases}$$

, (правые части уравнений, соответствующих каждому случаю, расположены одна под другой).

Сложив уравнения, получим соответственно

$$\begin{cases} 4x = 3; \qquad -3; \qquad -3; \qquad 3; \qquad 0; \qquad 0 \\ y = \ 4 - 2x; \ -4 - 2x; 1 - 2x; \ -1 - 2x; -2 - 2x; \ 2 - 2x \end{cases}.$$

Лишь в последних двух случаях x будет целым, следовательно, уравнение имеет два решения: $x = 0$, $y = -2$ и $x = 0$, $y = 2$.

Ответ: (0; – 2), (0; 2).

Бывает, что многочлен, стоящий в левой части уравнения, не удаётся разложить на множители, но одна из неизвестных входит в уравнение в первой степени. Тогда целесообразно выразить её через другую неизвестную (как это часто делают при решении систем алгебраических уравнений).

Пример 29. (МФТИ, 1998) Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - xy - 7x + 2y + 23 = 0.$$

Решение. В уравнение y входит в первой степени, поэтому выразим y через x: $x^3 + y(2-x) - 7x + 23 = 0$, $y = \dfrac{x^3 - 7x + 23}{x-2}$. Чтобы легче разделить числитель на знаменатель, введём $t = x-2,\ x = t+2, x^3 = t^3 + 6t^2 + 12t + 8$,

$y = \dfrac{t^3 + 6t^2 + 12t + 8 - 7t - 14 + 23}{t} = t^2 + 6t + 5 + \dfrac{17}{t}$. По условию, t и y целые, поэтому 17 должно делиться на t. Таким образом, возможны варианты: $t = 1$, $x = 3$, $y = 29$; $t = -1$, $x = 1$, $y = -17$; $t = 17$, $x = 19$, $y = 397$; $t = -17$, $x = -15$, $y = 191$.

Ответ: (3; 29), (1; – 17), (19; 397), (– 15; 191).

Уравнение, решенное в примере 30 – это частный случай уравнения второго порядка $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ **(4)** с целыми a, b, c, d .

Оказывается, некоторые из них можно решить и в тех случаях, когда левую часть нельзя разложить на множители первой степени с целыми коэффициентами.