§3. Признаки делимости и равноостаточности

Для разложения на множители многозначного числа требуется найти хотя бы небольшие его делители. Для этого предназначены признаки делимости натуральных чисел по их цифрам. Вспомним простейшие признаки делимости и выведем дальнейшие. Пусть дано n-значное натуральное число с десятичной записью $a = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0} = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + ... + 10a_1 + a_0$ (a_0 – цифра единиц, a_1 – цифра десятков и т.д.). По смыслу десятичной записи, ***число кратно* 10^k*, если его последние k цифр равны нулю.***

Сформулируем ***некоторые известные признаки делимости***.

В формулировках последних трёх признаков используются понятия разбиения числа на двузначные или трёхзначные грани – двузначные или трёхзначные числа из цифр данного числа, справа налево (подробнее об этом читайте ниже).

Если…	*то а делится на …*
a_0 *делится на* 2	2
число a_1a_0 *делится на* 4 *или* 25	4 или 25
$a_2\,a_1\,a_0$ *делится на* 8	8
a_0 *равно* 0 *или* 5	5
a_0 *равно* 0	10
сумма цифр делится на 3 *или* 9	3 или 9 соответственно
знакочередующаяся сумма цифр делится на 11	11
сумма двузначных граней делится на 11	
знакочередующаяся сумма трехзначных граней делится на 7,11 *или* 13 *соответственно*	7,11,13 соответственно
сумма трехзначных граней делится на 37	37

Подчеркнём, что ***числа, фигурирующие в левом столбце таблицы, дают такой же, как и а, остаток от деления на соответствующий делитель***.

Первые признаки делимости Вам известны из школы.

Чтобы обосновать *признаки делимости на 3 ина 9, заметим,* что для любого $k = 1, 2, \ldots$ разность $10^k - 1$ кратна девяти. Это видно из десятичной записи этих чисел. В самом деле, $10 - 1 = 9$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$ и вообще $10^k - 1 = 99\ldots9$ (k девяток). Данное число можно преобразовать так:

$a = (99\ldots9 + 1)\, a_n + (9\ldots9 + 1)\, a_{n-1} + \ldots + (99 + 1)\, a_2 + (9 + 1)\, a_1 + a_0 =$

$= \underline{9\cdot(11\ldots1\cdot a_n + 1\ldots1\cdot a_{n-1} + \ldots + a_1)} + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$. Так как подчёркнутое выражение кратно 9 (в частности, трём), то остаток от деления данного числа на 3 или на 9 равен остатку от деления на 3 или соответственно на 9 суммы цифр этого числа.

Займёмся *делимостью на* 11. Для деления на 11 учтём, что 11 = 10 + 1; из формулы (II) следует, что 10 + 1, 1000 + 1, вообще нечётные степени десяти, увеличенные на 1, делятся на 11. Также (в силу формулы (I)) делятся на 11 чётные степени 10, уменьшенные на 1: 100 – 1 = 99, 10000 – 1 = 9999 и т.д. Перепишем наше число в виде

$a = a_0 + (11 - 1)a_1 + (99 + 1)\, a_2 + (1001 - 1)\, a_3 + \ldots = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + \underline{11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + \ldots}$

Все подчёркнутые слагаемые кратны 11, поэтому остаток от деления данного числа на 11 равен остатку при делении на 11 знакочередующейся суммы его цифр.

Например, число 1522906 $\vdots$ 11, так как $6 - 0 + 9 - 2 + 2 - 5 + 1 = 11$ делится на 11.

Рассмотрим разбиение данного числа на двузначные доли – *грани,* начиная справа налево (см. формулировку в таблице). Представим число *a* в виде $a = \overline{a_1a_0} + 100\overline{a_3a_2} + 100^2\,\overline{a_5a_4} + \ldots$ и выделим из него сумму $\overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \ldots$:

$$a = \overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \ldots + (99\overline{a_3a_2} + 9999\overline{a_5a_4} + \ldots)$$

Так как $99 = 100 - 1$ делится на 11, то число, взятое в скобки, кратно 11. Тем самым остаток от деления *a* на 11 равен остатку от деления на 11 суммы его двузначных граней.

Пример 14. Делится ли на 11 число $a = 94317991999$?

Решение. Произведём разбиение числа *a* на двузначные грани: 9|43|17|99|19|99. Вычислим их сумму: $9 + 43 + 17 + 99 + 19 + 99 = 286$. Не производя деления, подсчитаем сумму двузначных граней полученного числа: $2 + 86 = 88$ – она делится на 11, следовательно, 286 делится на 11, так же, как и данное число.

Признаки делимости на 7 и 13 попробуйте доказать самостоятельно.

Приведём пример применения **объединённого признака делимости на 7, 11, 13.**

Пример 15. Являются ли 7, 11, 13 делителями числа 5159539?

Решение. Разобьём данное число справа налево на трёхзначные числа (грани): 5|159|539 (последняя грань однозначная). Знакочередующаяся сумма полученных чисел равна $539 - 159 + 5 = 385$. Так как $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ делится на 7 и 11, то данное число делится на 7 и 11, но не делится на 13. Остаток от деления на 13 данного числа такой же, как у 385, т.е. 8.

Аналогично, признак делимости на 37 по трёхзначным граням получается, если учесть, что $1000 = 999 + 1 = 37\cdot 27 + 1$.

Часто встречаются задачи, где требуется восстановить неизвестные цифры числа, если оно должно делиться на указанные числа.

Пример 16. Найти все пятизначные числа вида $71X1Y$, делящиеся на 132.

Решение. Искомое число должно делиться на попарно взаимно простые числа 3, 4 и 11. Для делимости на 4 необходимо, чтобы двузначное число $1Y$

делилось на 4, откуда $Y = 2$ или 6. Сумма его цифр равна $9 + X + Y$, так что $X + Y \,\vdots\, 3$. Знакочередующаяся сумма цифр $Y - 1 + X - 1 + 7 = X + Y + 5$ должна делиться на 11, откуда $X + Y = 6$ или 17, но второй вариант несовместим с делимостью на 3. Следовательно, $Y = 2$, $X = 4$ или $Y = 6$, $X = 0$.

Ответ: 71412 и 71016.