§2. Деление целых чисел с остатком. Основная теорема арифметики

Любое целое число a можно разделить с остатком на любое натуральное число n, т.е. представить a в виде

$$\boldsymbol{a = nq + r,\ 0 \le r < n,} \qquad \text{(III)}$$

где q – целое число – *частное*, а r – *остаток* от деления a на n. *Частное q и остаток r определены однозначно.*

В самом деле, если допустить, что возможны два выражения $a = nq + r = sn + t,\ 0 \le r \le t < n,$ то $0 \le t - r = n(q - s) < n,$ следовательно, $q = s \Rightarrow t = r$ – единственность доказана.

Например, при делении 2010 на 7 получим 2010 = 287 ·7 + 1. Для числа –2010 неверно было бы написать, что –2010 = –287·7 – 1, так как остаток должен быть положительным. Чтобы удовлетворить этому условию, вычтем из правой части 7 и прибавим к ней 7: –2010 = –287·7– 7+7–1 = –288·7 + 6, т.е. остаток равен 6. В общем случае при $a < 0$ надо вначале получить равенство $-a = sn + t, 0 < t < n,$ а затем провести такие преобразования:

$$a = -sn - t = -(s+1)n + (n - t), q = -s - 1, r = n - t\,.$$

Из теоремы о делении с остатком вытекает, что ***среди любых выписанных подряд n целых чисел ровно одно кратно n,*** а остальные дают при делении все остатки от 1 до n – 1 (причём эти остатки идут подряд, начинаясь, возможно, не с 1).

Поэтому ***чётные и нечётные числа чередуются, так что произведение*** $n(n+1)$ ***любых двух последовательных целых чисел делится на 2.***

Это утверждение часто применяется при решении задач.

Пример 9. Доказать, что при любом целом *n* число $9n^2+9n+2$ делится на 2.

Решение. Данное выражение разлагается на множители: $9n^2+9n+2 = (3n+1)(3n+2)$, которые представляют собой два последовательных целых числа. Можно то же самое доказать проще, если учесть, что $9n^2+9n+2$ и $9n(n+1)$ имеют одинаковую чётность.

Далее, ***произведение*** $(n-1)n(n+1)$ ***любых трёх последовательных целых чисел делится на 3*** (по скольку все целые числа можно представить в виде $3k;\ 3k+1;\ 3k+2;\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$).

Кроме того, среди 3-х множителей встречаются два последовательных целых числа, а именно, $k-1$ и k или k и $k+1$. Отсюда следует, что ***при любом целом*** k ***произведение*** 3-х последовательных чисел ***делится на 6*** (по свойству 3, так как оно делится на взаимно простые числа 2 и 3).

Пример 10. Доказать, что для любого целого *n* число $a=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ целое.

Решение. Сложим данные дроби: $a=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. Разложим числитель на множители: $n^3+3n^2+2n = n(n^2+3n+2) = n((n^2+n)+(2n+2)) = n(n+1)+2(n+1)) = n(n+1)(n+2)$. Оказывается, числитель равен произведению трёх последовательных целых чисел и, как замечено, делится на 6, следовательно, данное число целое.

———— . ———— . ————

Произведение четырёх последовательных целых чисел $(n-1)n(n+1)(n+2)$ ***делится на*** **24**. Как показано выше, оно делится на 3. Кроме того, среди записанных четырёх сомножителей один делится на 4 и ещё один (через один от него) делится ровно на 2. Таким образом, по свойствам делимости, произведение делится на 8, а т.к. числа 3 и 8 взаимно простые, то оно делится на $3 \cdot 8 = 24$.

Пример 11. Доказать, что если натуральное число p взаимно просто с 6 и $p > 4$, то $p^2 - 1$ делится на 24.

Решение. Выражение $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ – часть произведения $(p-1)p(p+1)(p+2)$, делящегося на $24 = 8 \cdot 3$. Так как p не делится на 2, то и $p + 2$ не делится на 2, так что $p(p+2)$ не делится на 2, поэтому $(p-1)(p+1)$ делится на 8. Кроме того, $(p-1)p(p+1) \vdots 3$, а p взаимно просто с 3, следовательно, $(p-1)(p+1)$ делится и на 3, а так как 8 и 3 взаимно просты, то $(p-1)(p+1)$ делится на 24, что и требовалось доказать.

Пример 12. Найти все простые числа p такие, что $p + 10$, $p + 14$ являются простыми.

Решение. Очевидно, $p > 2$, так как при $p = 2$, $p + 10 = 12$ и $p + 14 = 16$. Заметим, что числа p, $p + 10 = p + 1 + 9$, $p + 14 = p + 2 + 12$ дают разные остатки при делении на 3, поскольку p, $p + 1$, $p + 2$ – три последовательных натуральных числа. Следовательно, одно из этих чисел делится на 3. Если p делится на 3, то p равно трём. Если p не делится на 3, то $p + 10$ или $p + 14$ делятся на 3 и не могут быть простыми.

Ответ: $p = 3$.

Сформулируем ключевое для решения задач о делимости утверждение, известное как

<u>Основная теорема арифметики натуральных чисел.</u> ***Любое натуральное число n, большее единицы, можно разложить в произведение простых чисел. Это разложение единственно, с точностью до порядка следования сомножителей.***

Строгое доказательство этой теоремы первым дал К.Ф. Гаусс (1777 – 1855), немецкий математик, внёсший крупный вклад в алгебру, теорию чисел, математический анализ и другие разделы теоретической и прикладной математики. Это доказательство можно прочитать, например, в учебнике [3]. Если в разложении на множители числа n встречаются равные простые числа, их удобно собирать в степени. В результате получается

каноническое разложение: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$ **(IV),**

где $p_1, \ldots, p_m$ – *различные простые числа.* Такое разложение абсолютно однозначно, если потребовать, чтобы $p_1 < \ldots < p_m$.

Например, $3780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Следующий пример вполне можно решить с помощью простейшего калькулятора. Но наша цель – усвоить идеи и методы, чего можно достичь только при ручных вычислениях.

Пример 13. Найти все делители числа 496 и сумму его собственных делителей.

Решение. Разложим 496 на простые множители: $496 = 8\cdot 62 = 2^4\cdot 31$. Все делители: 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ и 31, $2\cdot 31 = 62$, $4\cdot 31 = 124$, $8\cdot 31 = 248$ и само число 496. Сложим собственные делители, т.е. найденные числа, меньшие 496: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 2\cdot 31 + 4\cdot 31 + 8\cdot 31 =$ (для удобства подсчёта сгруппируем слагаемые) $= (1 + 31) + (2 + 2\cdot 31) + (4 + 4\cdot 31) + (8 + 8\cdot 31) = 32\cdot(1 + 2 + 4 + 8) + 16 = 16\cdot(1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 16\cdot 31 = \underline{496}$.

Натуральное число, которое равно сумме его собственных делителей, принято называть совершенным.

При решении уравнений в целых числах приходится использовать разложение целых чисел не только на положительные, но и на отрицательные множители. В таком случае каноническим разложением следует считать разложение $n = (\pm p_1^{k_1})(\pm p_2^{k_2})\ldots(\pm p_s^{k_s})$, причём знаки можно комбинировать любым способом так, чтобы знак произведения совпадал со знаком числа n.

