

**Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)**

МАТЕМАТИКА

Комплексные числа

Задание №6 для 11-х классов

(2009-2010 учебный год)



г. Долгопрудный, 2010

Составитель: С.Е. Городецкий, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №6 для 11-х классов (2009-2010 учебный год). - М.: МФТИ, 2009, 28с.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

Городецкий Сергей Евгеньевич

Подписано 16.03.10. Формат 60x90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75

Уч.-изд. л. 1,55. Тираж 1100. Заказ №16-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс 8(498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**
тел. 8(498) 744-65-83 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2010

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счёта возникает так называемый натуральный ряд чисел $1, 2, \dots, n, \dots$. В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными на множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§1. Определение комплексных чисел.

Операции над комплексными числами

1. Комплексные числа. Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, в которых a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ и для которых следующим образом вводятся понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$; (пишут $a + bi = c + di$)

б) суммой чисел $a + bi$ и $c + di$ называется число

$$a + c + (b + d)i;$$

в) произведением чисел $a + bi$ и $c + di$ называется число

$$ac - bd + (ad + bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i, \quad (1)$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i. \quad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z , при этом действительное число a называется действительной частью комплексного числа ($z = a + bi$) и обозначается $\operatorname{Re} z$; пишут $\operatorname{Re} z = a$; или $\operatorname{Re}(a + bi) = a$. Число b называется мнимой частью числа $z = a + bi$ и обозначается $\operatorname{Im} z$, пишут $\operatorname{Im} z = b$ или $\operatorname{Im}(a + bi) = b$. Символ i называется мнимой единицей.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a + 0i$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a + 0i) + (c + 0i) = a + c + 0i,$$

$$(a + 0i)(c + 0i) = (ac) + 0i.$$

Таким образом, отождествив число $a + 0i$ с действительным числом a , получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно $a = a + 0i$. В частности, число $0 = 0 + 0i$ будем, как обычно, называть нулём, а число $1 = 1 + i0$ – единицей.

Числа вида $0 + bi$ называют чисто мнимыми и обозначаются bi :

$$0 + 7i = 7i, \quad 0 - 2i = -2i.$$

На основании формулы (2) найдем значение выражения $i^2 = ii$:

$$i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Таким образом,

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a + bi$ и $c + di$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1 .

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 8 + 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$. По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3 + 2) = 3 + 5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8 + 3i)$ и $(-5 + 2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(-5 + 2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2 .

2. *Ассоциативность сложения:* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .

3. $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z .

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.

5. *Коммутативность умножения:* $z_1 z_2 = z_2 z_1$ для любых комплексных чисел z_1, z_2 .

6. Ассоциативность умножения: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .

7. Дистрибутивный закон: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 .

8. $1 \cdot z = z$ для любого комплексного числа z .

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 , где $z_2 \neq 0$, существует число z такое, что $z_2 z = z_1$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения. Докажем свойство 9; остальные докажете самостоятельно.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z = x + yi$. Тогда равенство $z z_2 = z_1$ запишется так: $a + bi = (x + yi)(c + di) = xc - yd + (xd + yc)i$.

Отсюда следует, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4)$$

Пример 2. Найти разность $z_1 - z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 7i \text{ и } z_2 = -1 + 3i.$$

Находим разность

$$z_1 - z_2 = (2 - 7i) - (-1 + 3i) = (2 - (-1)) + i(-7 - 3) = 3 - 10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1) + (-7)3}{1 + 9} + i \frac{-7(-1) - 2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{-23}{10} + \frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла. Невозможно перенести понятия «больше» и «меньше» на множество комплексных чисел, если мы при этом хотим сохранить все свойства неравенств, выполняющиеся для действительных чисел (например, что при умножении обеих частей неравенства на положительное число оно остается верным и т. п.). Например, покажем, что числа i и 0 сравнить невозможно.

Предположим, что $i > 0$. Тогда умножая обе части неравенства на i (по предположению $i > 0$, поэтому знак неравенства не меняем), получаем $i^2 > 0$, т.е. $-1 > 0$, что неверно. Предположим, что $i < 0$. Тогда, умножив обе части неравенства на i , снова получим, что $i^2 > 0$.

Таким образом, сравнить числа i и 0 невозможно.

§2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a, b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a$, а ордината равна $\operatorname{Im} z = b$. Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a, b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор \overrightarrow{OM} (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0, 0)$ и концом в точке $M(a, b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i$.

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости, позволя-

ют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + bi$.

2. Модуль комплексного числа. Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

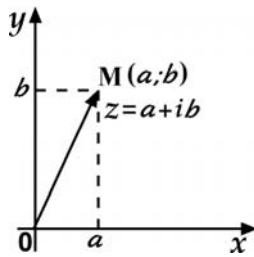


Рис. 1

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой r . Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только в том случае, когда $z = 0 + 0i = 0$.

Пусть $z = a + bi$. Число $a - bi$ называется комплексно сопряженным числу $z = a + bi$ и обозначается \bar{z} : $\bar{z} = a - bi$ (см. рис.2).

Заметим, что $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 , \bar{z}_2 и к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4). Заметим также, что сумма и произведение комплексных чисел z и \bar{z} всегда является действительным числом.

Пример 3. Найти частное $\frac{3 - 5i}{-1 + 10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

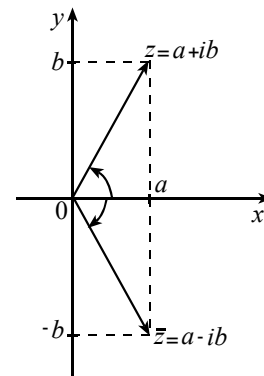


Рис. 2

$$\frac{3-5i}{-1+10i} = \frac{(3-5i)(-1-10i)}{(-1+10i)(-1-10i)} = \frac{-3+5i-30i+50i^2}{1+100} = -\frac{53}{101} - \frac{25}{101}i.$$

Заметим также, что выполняются соотношения:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad (\text{а})$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \quad (\text{б})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad (\text{в})$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad (\text{г})$$

$$\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}. \quad (\text{д})$$

Докажем, например, (б). Пусть $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \end{aligned}$$

Перейдём к равенству (г):

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (bc + ad)i;$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac - bd + (bc + ad)i} = ac - bd - (bc + ad)i.$$

Остальные соотношения докажите самостоятельно (контрольный вопрос 9).

3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел. Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Им соответствуют векторы с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2) . Тогда числу

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

будет соответствовать вектор с координатами $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2 , надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2 .

Аналогично, разности $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2 .

Модуль $|z_2 - z_1|$ разности двух комплексных чисел z_2 и z_1 , по определению модуля, есть длина вектора $z_1 - z_2$. Построим этот вектор как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 3). Получим вектор \overrightarrow{OM} , равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

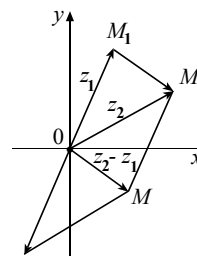


Рис. 3

Следовательно, $|z_2 - z_1|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть **модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.**

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: а) $|z - i| = 1$, б) $1 < |z + 3 + i| < 3$,

$$\text{в) } |z - 1| < |z + 1|; \quad \text{г) } |z - 1| = 2|z + 2|.$$

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки z комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

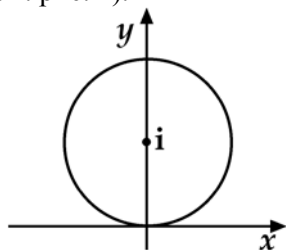


Рис. 4

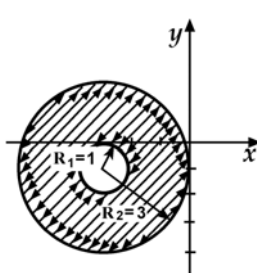


Рис. 5

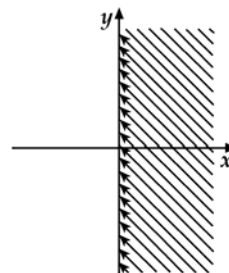


Рис. 6

б) Заметим, что $|z + 3 + i| = |z - (-3 - i)|$. Условию $1 < |z + 3 + i| < 3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые

удалены от точки $(-3 - i)$ на расстояние, большее 1, но меньше 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке $(-3 - i)$ и радиусами $R_1 = 1, R_2 = 3$ (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z = 1$, чем к точке $z = -1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 6: искомое множество заштриховано).

г) Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$|x - 1 + iy| = 2|x + 2 + iy|,$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + 4x + 4 + y^2),$$

$$3x^2 + 18x + 3y^2 + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0,$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 4.$$

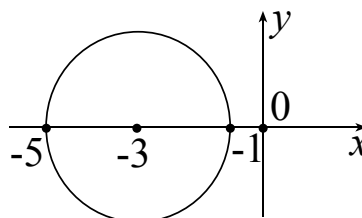


Рис. 7

Это окружность с центром в точке $z = -3$ и радиусом 2.

4. Аргументы комплексного числа. Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ ($z \neq 0$) называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z ; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z = a + bi$, пишут $\varphi = \arg z$ или $\varphi = \arg(a + bi)$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем считать, что $z \neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z = 0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z| = 0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определен единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – неко-

торый аргумент числа z , то углы $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z . Например, аргументами числа $(1-i)$ являются углы $-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис. 8).

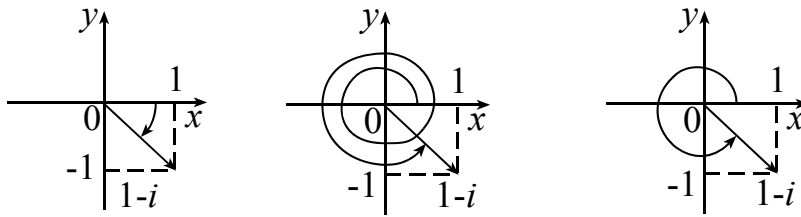


Рис. 8

Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π .

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 9) следует, что если $\varphi = \arg(a + bi)$, то справедливы равенства

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|}. \end{cases} \quad (5)$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства (5), то $\varphi = \arg(a + bi)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + bi$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a + bi$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5). Заметим, что аргументы чисел z и \bar{z} , $z \neq 0$, связаны соотношением

$$\arg \bar{z} = -\arg z \quad (\text{см. рис. 2}).$$

Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1 - i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = 1 - i$ лежит в IV чет-

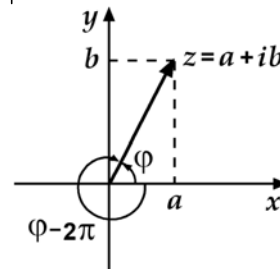
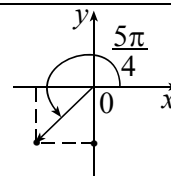


Рис. 9

верти. Поэтому достаточно указать такого решения одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Заметим, что если $\varphi = \arg(a+bi)$, $a \neq 0$, то из (5) следует, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$. Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg} \varphi = -1$, но не является аргументом числа $(1-i)$.

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1-i)$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = -1-i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1, \text{ которое является углом в III четверти. Получаем}$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0$, то есть $z = bi$, то либо $\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (если $b < 0$).

§3. Различные формы записи комплексных чисел.

Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Запись комплексного числа z в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другие формы записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z = a+bi$, то есть $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arg(a+bi)$. Тогда из формулы (5) следует, что $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, и, значит,

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $a + bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

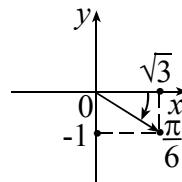
Пример 7. Записать число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Находим один из аргументов; так как $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} > 0$, $\operatorname{Im} z = -1 < 0$, то число $\sqrt{3} - i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, которое является углом в IV

четверти, т.е. $\varphi = \frac{11\pi}{6}$. Таким образом,

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$



Пример 8. Записать число в тригонометрической форме:

$$z = 1 + \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha, \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right).$$

Решение.

$r^2 = |z|^2 = (1 + \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha = 1 + 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 2 + 2 \cos 2\alpha = 4 \cos^2 \alpha$; отсюда $|z| = -2 \cos \alpha$ (т. к. α – угол третьей четверти).

$\operatorname{tg}(\arg z) = -\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, откуда $\arg z = -\alpha + \pi k$.

Так как $1 + \cos 2\alpha > 0$, а $-\sin 2\alpha < 0$, то число z лежит в четвертой четверти, и в качестве аргумента можно выбрать $\arg z = \pi - \alpha$.

Итак, $z = -2 \cos \alpha \cdot (\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha))$.

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &+ \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент суммы есть сумма аргументов сомножителей.*

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного является разностью аргументов делимого и делителя.*

3. Возведение в степень и извлечение корня. Формула (6) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – аргументы чисел z_1, z_2, \dots, z_n соответственно, то $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 \dots z_n)$,

$$|z_1| |z_2| \dots |z_n| = |z_1 z_2 \dots z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (8)$$

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.*

Формула (8) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найти z^{11} , если $z = 1 - i$.

Так как $|1 - i| = \sqrt{2}$, а одним из аргументов является $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (см. пример 5 на стр.11), то

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Следовательно, применяя формулу (8), получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left[\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right) \right] = 2^{11/2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] =$$

$$= 2^{11/2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}^{10} (1+i) = -2^5 (1+i) = -32 - 32i.$$

Пример 10. Вычислите сумму

$$B = \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha).$$

Решение. Рассмотрим также сумму

$$A = \cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha) \text{ и обозначим}$$

$$S = A + Bi.$$

Тогда интересующая нас сумма B есть мнимая часть числа S :

$$B = \operatorname{Im} S. \text{ Преобразуем } S:$$

$$S = (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)) +$$

$$+ (\cos(\varphi + 2\alpha) + i \sin(\varphi + 2\alpha)) + \dots + (\cos(\varphi + n\alpha) + i \sin(\varphi + n\alpha)).$$

Воспользовавшись первой формулой Муавра, получаем:

$$S = (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot$$

$$\cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 + \dots + (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n.$$

Обозначим $z_0 = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\omega_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

$$\text{Тогда } S = z_0 + z_0 \omega_0 + z_0 \omega_0^2 + \dots + z_0 \omega_0^n = z_0 (1 + \omega_0 + \omega_0^2 + \dots + \omega_0^n).$$

Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{n+1} - 1}{\omega_0 - 1}.$$

Чтобы выделить мнимую часть числа, домножим дробь на число, сопряжённое знаменателю:

$$S = z_0 \cdot \frac{(\omega_0^{n+1} - 1)(\overline{\omega_0} - 1)}{(\omega_0 - 1)(\overline{\omega_0} - 1)} = z_0 \cdot \frac{\omega_0^{n+1} \cdot \overline{\omega_0} - \omega_0^{n+1} - \overline{\omega_0} + 1}{(\omega_0 - 1)^2}.$$

Заметим, что $\omega_0 \cdot \overline{\omega_0} = |\omega_0|^2 = 1$; $\omega_0 + \overline{\omega_0} = 2 \cos \alpha$. Тогда

$$S = z_0 \cdot \frac{\omega_0^n - \omega_0^{n+1} - \overline{\omega_0} + 1}{2 - 2 \cos \alpha} = \frac{z_0 \omega_0^n - z_0 \omega_0^{n+1} - z_0 \overline{\omega_0} + z_0}{4 \sin^2(\alpha/2)} =$$

$$= [\cos(\varphi + n\alpha) + i \sin(\varphi + n\alpha) - \cos(\varphi + (n+1)\alpha) - i \sin(\varphi + (n+1)\alpha) - \cos(\varphi - \alpha) - i \sin(\varphi - \alpha) + \cos \varphi + i \sin \varphi] / 4 \sin^2(\alpha/2).$$

Выделяем мнимую часть S :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S &= \frac{\sin(\varphi + n\alpha) - \sin(\varphi + (n+1)\alpha) - \sin(\varphi - \alpha) + \sin \varphi}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\varphi + n\alpha - (\varphi + (n+1)\alpha)}{2} \cos \frac{\varphi + n\alpha + \varphi + (n+1)\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\varphi - (\varphi - \alpha)}{2} \cos \frac{\varphi + (\varphi - \alpha)}{2}}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \\ &= \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}{4 \sin^2(\alpha/2)} = \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2 \sin \alpha/2} = \\ &= \frac{-2 \sin\left(\frac{\varphi - \frac{\alpha}{2} - \left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi - \frac{\alpha}{2} + \left(\varphi + \frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{2}\right)}{2 \sin \alpha/2} = \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha/2}. \end{aligned}$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n* , $n \in \mathbb{N}$, из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n = \omega$.

Таким образом, для того чтобы извлечь корень степени n , $n \in \mathbb{N}$ из числа ω , нужно решить уравнение $z^n = \omega$.

Если $\omega = 0$, то при любом n уравнение $z^n = 0$ имеет одно и только одно решение $z = 0$.

Пусть теперь $\omega \neq 0$. Представим z и ω в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \omega = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0).$$

Тогда уравнение $z^n = \omega$ примет вид

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π . Следовательно,

$$r^n = r_0, \quad n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

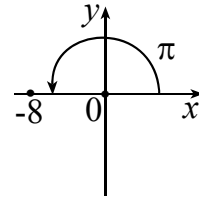
или

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения $z^n = \omega$ даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, (n-1). \quad (9)$$



В самом деле, придавая числу k в формуле (9) целые значения, отличные от $0, 1, \dots, (n-1)$, мы не получим других комплексных чисел. Например, при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k \right) \right) =$$

$$= \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\varphi_0}{n} + i \sin \frac{\varphi_0}{n} \right) = z_0.$$

Формула (9) называется *второй формулой Муавра*.

Таким образом, если $\omega \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа ω , все они содержатся в формуле (9).

В частности, если $n = 2$, то уравнение $z^2 = \omega$ имеет два корня:

$$z_1 = \sqrt{r_0} \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

$$z_2 = \sqrt{r_0} \left(\cos \left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi \right) \right) = -z_1,$$

то есть эти корни симметричны относительно начала координат.

Также из формулы (9) нетрудно получить, что если $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, то точки, изображающие все корни уравнения $z^n = \omega$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 11. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Запишем число $\omega = -8$ в тригонометрической форме: $\omega = -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Применяя формулу (9), получаем

$$z_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \quad \text{Следова-}$$

$$\text{тельно, } z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2 , находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 10).

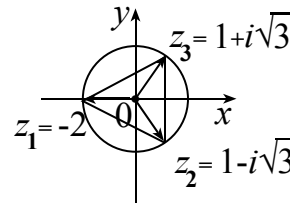


Рис. 10

Из сказанного выше следует, что символ $\sqrt[n]{\omega}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует чётко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$, или одно, и, если одно, то какое именно.

§4. Алгебраические уравнения

1. Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad (10)$$

с действительными коэффициентами a, b, c . Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \quad (11)$$

В случае, если $D < 0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \right),$$

откуда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются на множестве комплексных чисел.

Таким образом, на множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, уравнение имеет один корень (2 совпадающих корня или один корень кратности два); при $D \neq 0$, уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, где под \sqrt{D}

подразумеваются все значения корня.

Пример 12. Решить уравнение $z^2 + z + 1 = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, то $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Пример 13. Решить уравнение $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-(2i - 3) + \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(5 - i)}}{2} = \frac{3 - 2i + \sqrt{-15 - 8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15 - 8i}$ положим

$$\sqrt{-15 - 8i} = x + iy.$$

Тогда $-15 - 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15, \\ 2xy = -8, \end{cases}$$

причем x и y – действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1 = 1, y_1 = -4$ и $x_2 = -1, y_2 = 4$.

$$\text{Поэтому } z_1 = \frac{3 - 2i + (1 - 4i)}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i,$$

$$z_2 = \frac{3 - 2i + (-1 + 4i)}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т.е. двучленного уравнения степени n . Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени n :

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (12)$$

где a_0, \dots, a_n – заданные комплексные числа.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (12), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу*:

Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z - z_0$ равен $P_n(z_0)$, т.е. равен значению этого многочлена при $z = z_0$.

Действительно, $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$, где остаток $r(z)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$, т.е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z) = r$ является числом: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r$.

Положим в этом равенстве $z = z_0$. Получаем $P_n(z_0) = r$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $z - z_0$ и $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.

Пример 14. Остаток от деления многочлена $F(z)$ на $(z - 3 - i)$ равен $3i$, а остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(z + i - 1)$ равен 5. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(z - 3 - i)(z + i - 1)$.

Решение. По теореме Безу $F(3+i) = 3i$, $F(1-i) = 5$.

При делении многочлена $F(z)$ на многочлен второй степени остаток будет являться многочленом первой степени, то есть, в результате деления мы получим: $F(z) = (z-3-i)(z+i-1) \cdot Q(z) + az + b$, где $Q(z)$ – частное от деления, a и b – некоторые комплексные числа.

Подставим в это равенство $z = 3+i$ и $z = 1-i$.

$$z = 3+i \Rightarrow 3i = a \cdot (3+i) + b,$$

$$z = 1-i \Rightarrow 5 = a \cdot (1-i) + b.$$

Решая эту систему, находим, что $a = \frac{4i-1}{2}$, $b = \frac{7-5i}{2}$.

Значит, остаток $r(z) = \frac{4i-1}{2} \cdot z + \frac{7-5i}{2}$.

Пример 15. Найдите остаток от деления многочлена $F(z) = z^{1502} - 90z^{175} + 3$ на многочлен $z^2 + 1$.

Решение. Выполним деление с остатком:

$$z^{1502} - 90z^{175} + 3 = (z^2 + 1)Q(z) + az + b. \quad (13)$$

Числа $z = \pm i$ являются корнями многочлена $z^2 + 1$, поэтому имеет смысл подставить их в равенство (13).

$$z = i \Rightarrow i^{1502} - 90i^{175} + 3 = ai + b,$$

$$z = -i \Rightarrow (-i)^{1502} - 90(-i)^{175} + 3 = -ai + b.$$

Упрощая, получаем систему $\begin{cases} 2 + 90i = ai + b \\ 2 - 90i = -ai + b \end{cases}$

решениями которой являются числа $a = 90$ и $b = 2$.

Значит, остаток равен $r(z) = 90z + 2$.

Замечание. Обратите внимание, что мы решим задачу, в условии которой были даны только действительные числа, с помощью комплекс-

ных чисел. При этом в ответе вышел также многочлен с действительными коэффициентами.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет на множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения

$$a_n (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}, \quad (14)$$

где z_1, z_2, \dots, z_k – некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – натуральные числа, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$ (доказательство может быть произведено индукцией по n).

Отсюда следует, что числа z_1, z_2, \dots, z_k и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1 является корнем кратности α_1, z_2 – корнем кратности α_2 и т.д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет на множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Заметим, что если уравнение не является алгебраическим, то эта теорема, вообще говоря, неверна.

Отметим также следующее утверждение. *Если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена.* Покажем это.

Если z_0 – корень многочлена P_n , то это значит, что $P_n(z_0) = 0$. Тогда $\overline{P_n(z_0)} = 0$, то есть $\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0$.

Пользуясь равенствами (в) и (г), получаем, что

$$\overline{a_n} (\overline{z_0})^n + \overline{a_{n-1}} \cdot (\overline{z_0})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \overline{z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Поскольку числа a_0, a_1, \dots, a_n действительные, то

$$\overline{a_n} = a_n, \overline{a_{n-1}} = a_{n-1}, \dots, \overline{a_0} = a_0.$$

Таким образом, $a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$, что и означает, что число $\overline{z_0}$ есть корень многочлена P_n .

Можно также показать, что если для многочлена с действительными коэффициентами z_0 – корень кратности k , то и $\overline{z_0}$ корень кратности k .

Разложение (14) для многочленов с действительными коэффициентами примет вид:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{\alpha_1} (z - \overline{z_1})^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} (z - \overline{z_2})^{\alpha_2} \dots \quad (15)$$

$$\dots (z - z_l)^{\alpha_l} (z - \overline{z_l})^{\alpha_l} \cdot (z - z_{l+1})^{\alpha_{l+1}} (z - z_{l+2})^{\alpha_{l+2}} \dots (z - z_m)^{\alpha_m},$$

причем $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l) + \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \dots + \alpha_m = n$.

Здесь z_1, z_2, \dots, z_l – комплексные числа; $z_{l+1}, z_{l+2}, \dots, z_m$ – действительные числа.

Заметим, что $(z - z_i) \cdot (z - \overline{z_i}) = z^2 - (z_i + \overline{z_i})z + z_i \overline{z_i}$ есть квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Мы получили следующее утверждение: *любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами.*

Пример 16. Решите уравнение: а) $z^3 = \overline{z}$; б) $|z| + iz = 3 - 5i$.

Решение. а) Представим число z в тригонометрической форме:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Вспомним, что $|\overline{z}| = |z|$, а в качестве одного из аргументов числа \overline{z} можно выбрать $(-\varphi)$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = \rho (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)). \quad (16)$$

Возможны два случая:

(1) $\rho = 0$, тогда $z = 0$, и это решение уравнения.

(2) $\rho \neq 0$. Тогда выполнения равенства (16) означает, что у чисел в левой и правой части равны модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\varphi = -\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \quad (17)$$

Несложно понять, что мы получим всевозможные решения, если подставим в (17) значения $k = 0, 1, 2, 3$.

Итак, $z = 1$ (при $k = 0$); $z = i$ (при $k = 1$); $z = -1$ (при $k = 2$), $z = -i$ (при $k = 3$).

Ответ: $0; \pm 1; \pm i$.

б) Пусть $z = x + iy$. Тогда $\sqrt{x^2 + y^2} + ix - y = 3 - 5i$.

Приравняем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 3, \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sqrt{25 + y^2} = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ 25 + y^2 = y^2 + 6y + 9, \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Значит, $z = -5 + \frac{8}{3}i$. **Ответ:** $-5 + \frac{8}{3}i$.

Выше сформулированные теоремы полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\frac{a_0}{a_1}$,

корни уравнения второй степени $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ всегда могут быть легко получены с помощью формулы (11), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьей и четвертой степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае просто не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.*

В самом деле, пусть $z = k$ – целый корень уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – целые числа. Тогда $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$.

Отсюда получаем, что $a_0 = -k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1)$, то есть k – делитель числа a_0 (число $a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 17. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0$.

Рассматривая делители свободного члена $\pm 1, \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z - 5$:

$$\begin{array}{r} z^3 - 4z^2 - 4z - 5 \quad \Big| \quad z - 5 \\ \underline{z^3 - 5z^2} \\ - z^2 - 4z \\ \underline{- z^2 + 5z} \\ z - 5 \\ \underline{- z + 5} \\ 0 \end{array}$$

Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z - 5)(z^2 + z + 1)$.

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ (см. пример 12), получаем остальные корни. Итак, $z_1 = 5$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 18. Найти целые корни уравнения $2z^3 - 5z^2 - 2z + 2 = 0$.

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm 1, \pm 2$. Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 19. Решить уравнение $z^4 - 2z^3 - 12z^2 + 18z + 27 = 0$.

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z = -1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4 - 2z^3 - 12z^2 + 18z + 27$ на $z + 1$, получим многочлен $z^3 - 3z^2 - 9z + 27$. Корнем уравнения $z^3 - 3z^2 - 9z + 27 = 0$ является число $z = 3$. Разделив многочлен $z^3 - 3z^2 - 9z + 27$ на $z - 3$, получим $z^2 - 9$. Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде $(z + 1)(z - 3)(z^2 - 9) = 0$, т.е. имеет два однократных корня $z = -1, z = -3$ и один двукратный корень $z = 3$.

Контрольные вопросы

1(5). Что называют алгебраической формой комплексного числа z ? Запишите в алгебраической форме следующие числа:

а) $(2i + 5) - 6(3i - 2)$; б) $(4 + i)(2i - 1)$;

в) $i^5 + i^4 + i^3 + i^2$; г) $\frac{3 + 4i}{1 + 4i}$.

2(2). Найдите z , если известно, что $z + \bar{z} = 3$, $i(z - \bar{z}) = 30$.

3(3). Какие из следующих выражений являются тригонометрической формой числа $z = i - 1$:

а) $2i - (i + 1)$; б) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$;

в) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; г) $\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right)$;

$$\text{д) } \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right); \text{ е) } \sqrt{2} (\cos 855^\circ + i \sin 855^\circ).$$

4(5). Запишите следующие числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = -10; \quad z_2 = -5i; \quad z_3 = i - \sqrt{3}; \quad z_4 = 4 - 4i; \quad z_5 = 3i - 2.$$

5(8). Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$\text{а) } |z + i - 2| = 3; \quad \text{б) } |z - 2i| = |z + 4|;$$

$$\text{в) } \arg z = \frac{13\pi}{6}; \quad \text{г) } \arg \bar{z} = \frac{2\pi}{3}.$$

6(9). Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислите:

$$\text{а) } \frac{(1+i)^{2010}}{2^{1000}}; \quad \text{б) } \frac{(i-\sqrt{3})^{1337} (i-1)^{250}}{(i\sqrt{3}-1)^{1453}}; \quad \text{в) } \sqrt[6]{1}; \quad \text{г) } \sqrt[4]{-4}; \quad \text{д) } \sqrt[3]{-27i}.$$

7(3). Сформулируйте теорему Безу. Делится ли многочлен $3z^6 - 5z^3 - 10z - 18$ на многочлен а) $z + 1$; б) $z - 2$? Если нет, то найдите остаток от деления.

8(6). Решите квадратное уравнение:

$$\text{а) } z^2 + 5z + 18 = 0; \quad \text{б) } z^2 - (6i + 4)z - 21 + 12i = 0;$$

$$\text{в) } z^2 + (3i + 5)z - 16 + 3i = 0.$$

9(3). Докажите соотношения а), в), д) на стр. 8.

Задачи

1(5). Представьте число z в тригонометрической форме, если

$$\text{а) } z = \sin \frac{13\pi}{5} + i \cos \frac{2\pi}{5}; \quad \text{б) } z = 1 + \sin 4\alpha + i \cos 4\alpha,$$

$$\text{где } \frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{2}^* \text{(3). Найдите } z^n + \frac{1}{z^n}, \text{ если } z + \frac{1}{z} = -1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

3(8). Решите уравнение:

а) $(\bar{z})^2 = z^3$; б) $z^2 - z|z| + |z|^2 = 0$;

в) $(3\bar{z} - 2i + 1)(i + 1) + (z - 4)(2i - 5) = (i - 2)(i + 3)$.

4(9). Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\frac{z + 2i}{2i - 5} = \frac{\bar{z} - 2i}{-2i - 5}$;

б) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(iz + 2 + i) \leq \frac{\pi}{3}$;

в) $\left| \frac{z + i}{z - i + 2} \right| = 3$; г) $(3i - 1)z = |z\sqrt{3}|$.

5* (4). Вычислите сумму

$$S = \cos \varphi + a \cos 2\varphi + a^2 \cos 3\varphi + \dots + a^{n-1} \cos n\varphi.$$

6(2). Остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(2z + 5)$ равен 5, а остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $(3z - 1)$ равен 6. Найдите остаток от деления многочлена $F(z)$ на многочлен $6z^2 + 13z - 5$.

7(2). Решите уравнение $z^4 + 3z^3 + 7z^2 + 8z + 6 = 0$, если число $z_1 = i - 1$ является его корнем.

8* (4). Сумма квадратов корней уравнения $z^3 - 6z^2 + \alpha z + 40 = 0$ равна 28. Найдите α и решите это уравнение.

9(2). Составьте многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнями которого являются числа $z_1 = 3i$, $z_2 = 3$, $z_3 = -2 - i$.

10* (4). Найдите остаток от деления многочлена $z^{2010} - 4z^{2009} + 3$ на многочлен $z^2 + z + 1$.

11(4). Представьте следующие многочлены в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами:

а) $324z^4 + 1$; б) $z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 25z^2 + 49z - 30$.