§2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. ***Комплексная плоскость.*** Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a,b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a,$ а ордината равна $\operatorname{Im} z = b.$ Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi.$

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a,b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i.$

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости, позволяют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + bi$.

2. ***Модуль комплексного числа.*** Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

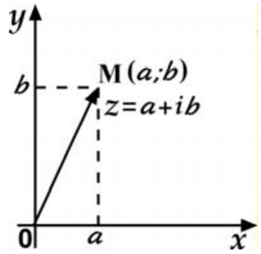


Рис. 1

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой *r*. Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только в том случае, когда $z = 0 + 0i = 0$.

Пусть $z = a + bi$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* числу $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$: $\bar{z} = a - bi$ (см. рис.2).

Заметим, что $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1, $\bar{z}_2$ и к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4). Заметим также, что *сумма и произведение комплексных чисел z и $\bar{z}$ всегда является действительным числом.*

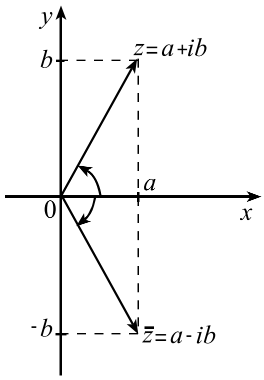


Рис. 2

Пример 3. Найти частное $\dfrac{3 - 5i}{-1 + 10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3-5i}{-1+10i}=\frac{(3-5i)(-1-10i)}{(-1+10i)(-1-10i)}=\frac{-3+5i-30i+50i^2}{1+100}=-\frac{53}{101}-\frac{25}{101}i.$$

Заметим также, что выполняются соотношения:

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \qquad (а)$$

$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|, \qquad (б)$$

$$\overline{z}_1+\overline{z}_2=\overline{z_1+z_2}\,, \qquad (в)$$

$$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2}\,, \qquad (г)$$

$$\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}\,. \qquad (д)$$

Докажем, например, (б). Пусть $z_1=a+bi, z_2=c+di.$ Тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2};$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+2abcd+b^2c^2-2abcd+a^2d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)c^2+\left(a^2+b^2\right)d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Перейдём к равенству (г):

$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=\left(a-bi\right)\left(c-di\right)=ac-bd-\left(bc+ad\right)i;$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{\left(a+bi\right)\left(c+di\right)}=\overline{ac-bd+\left(bc+ad\right)i}=ac-bd-\left(bc+ad\right)i.$

Остальные соотношения докажите самостоятельно (*контрольный вопрос* [1] 9).

3. ***Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел.*** Пусть $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i.$ Им соответствуют векторы с координатами (a_1,b_1) и $(a_2,b_2).$ Тогда числу

$$z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i$$

будет соответствовать вектор с координатами $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2.

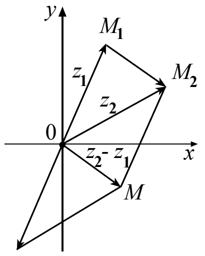


Рис. 3

Аналогично, разности $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.

Модуль $|z_2 - z_1|$ разности двух комплексных чисел z_2 и z_1, по определению модуля, есть длина вектора $z_1 - z_2$. Построим этот вектор как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 3). Получим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Следовательно, $|z_2 - z_1|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть **модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.**

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: а) $|z - i| = 1$, б) $1 < |z + 3 + i| < 3$,

в) $|z-1| < |z+1|$; г) $|z-1| = 2|z+2|$.

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки z комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

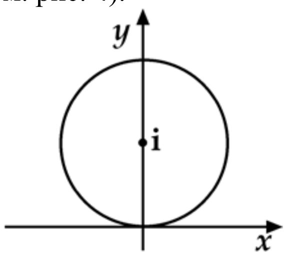


Рис. 4

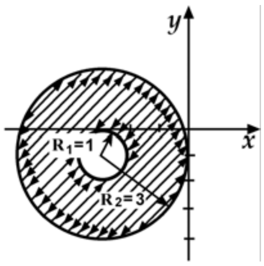


Рис. 5

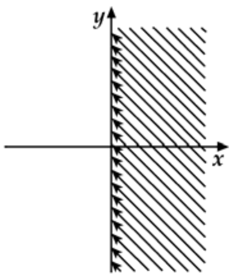


Рис. 6

б) Заметим, что $|z + 3 + i| = |z - (-3 - i)|$. Условию $1 < |z + 3 + i| < 3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки (–3 – i) на расстояние, большее 1, но меньшее 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке (–3 – i) и радиусами $R_1 = 1, R_2 = 3$ (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z = 1$, чем к точке $z = -1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 6: искомое множество заштриховано).

г) Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$|x - 1 + iy| = 2|x + 2 + iy|,$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4\left(x^2 + 4x + 4 + y^2\right),$$

$$3x^2 + 18x + 3y^2 + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0,$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 4.$$

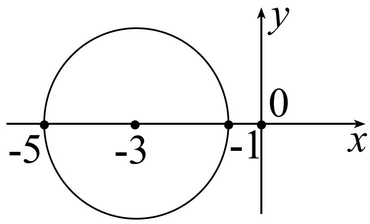


Рис. 7

Это окружность с центром в точке $z = -3$ и радиусом 2.

4. ***Аргументы комплексного числа.*** Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z = a + bi$, пишут $\varphi = \arg z$ èëè $\varphi = \arg(a + bi)$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем считать, что $z \neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z = 0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z| = 0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определен единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый аргумент числа z, то углы $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(1-\mathrm{i})$ являются углы $-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис. 8).

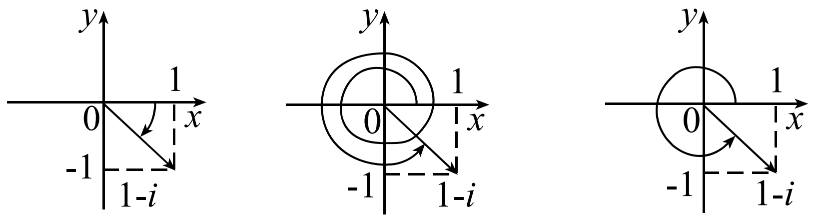


Рис. 8

Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 9) следует, что если $\varphi = \arg(a+bi)$, то справедливы равенства

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases} \qquad (5)$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства (5), то $\varphi = \arg(a+bi)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a + bi$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a + bi$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5). Заметим, что аргументы чисел z и $\bar{z}$, $z \neq 0$, связаны соотношением

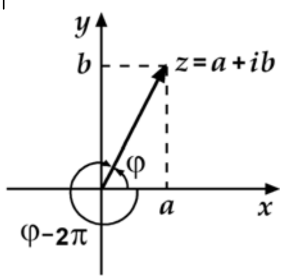
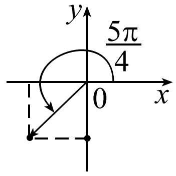


Рис. 9

$$\arg\bar{z} = -\arg z \text{ (см. рис. 2).}$$

Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1 - i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = 1 - i$ лежит в IV чет-



верти. Поэтому достаточно указать такого решения одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a+bi)$, $a \neq 0$, то из (5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg}\varphi = -1$, но не является аргументом числа $(1-i)$.

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1-i)$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0$, то точка $z = -1-i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{-1} = 1$, которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0$, то есть $z = bi$, то либо $\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (если $b < 0$).