Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Элементы комбинаторики. Понятие о вероятности случайного события

Задание №6 для 10-х классов

(2009-2010 учебный год)

г. Долгопрудный, 2010

Составитель: С.П. Коновалов, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №6 для 10-х классов (2009-2010 учебный год). - М.: МФТИ, 2010, 20с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 16 апреля 2010г.

Составитель:
Коновалов Сергей Петрович
Подписано 20.03.10. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25
Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 1100. Заказ №14-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351– **очно-заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6583 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Комбинаторикой (от латинского combinare – соединять, сочетать) называют раздел математики, в котором изучаются задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества. Некоторые часто встречающиеся комбинации получили названия, которые, видимо, уже встречались читателю: перестановки, размещения, сочетания.

В этом задании рассматриваются как перечисленные «стандартные» комбинации, так и общие принципы решения комбинаторных задач.

§ 1. Примеры комбинаторных задач и общие принципы комбинаторики

Пример 1, навеянный сказкой Андерсена «Снежная королева». Помните, когда Герда нашла Кая в чертогах Снежной королевы, тот безуспешно складывал из льдинок слово «вечность» (за решение задачи Каю были обещаны свобода, весь свет и новые коньки). Упростим задачу и представим, что у нас есть набор из восьми карточек с буквами «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь». Вопрос: сколько восьмибуквенных «слов» можно составить из этих карточек? (Здесь и далее под словом понимается некоторая последовательность букв.)

Составление слова из восьми букв можно представить как заполнение буквами клеток следующей таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8

На первое место можно поставить любую из восьми букв, на второе – любую из семи оставшихся и т.д. вплоть до заполнения единственным способом клетки № 8 последней оставшейся буквой. Число способов заполнения таблицы будет равно

$$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 8!$$

Напомним, что символом $n!$ (читается «эн факториал») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$

Ответ: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$

Наверное, читателя смутила та поспешность, с которой мы завершили решение примера 1, перемножив числа способов заполнения клеток таблицы. Чтобы прояснить этот момент, разберём более общую задачу.

Пусть множество $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ состоит из m элементов, а множество $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$ – из n элементов. Рассмотрим множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a,b), где элемент a принадлежит множеству A, а элемент b принадлежит множеству B (такое множество называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$). Иными словами, рассматривается множество, элементами которого являются «карточки» вида

$$\boxed{a \mid b}$$

Слово «упорядоченные» в определении $A \times B$ особенно важно, когда в A и B есть одинаковые элементы. Например, если $A = B = \{а, б, ..., я\}$ – русский алфавит, то элементы $A \times B$ можно считать словами, а $\boxed{а \mid х}$ и $\boxed{х \mid а}$ - разные слова!

Правило произведения: множество $A \times B$ содержит mn элементов.

Доказательство этого утверждения почти очевидно, т.к. все элементы-карточки можно расположить в виде прямоугольной таблицы, в которой m строк и n столбцов.

$\boxed{a_1 \mid b_1}$	$\boxed{a_1 \mid b_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_1 \mid b_n}$
$\boxed{a_2 \mid b_1}$	$\boxed{a_2 \mid b_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_2 \mid b_n}$
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
$\boxed{a_m \mid b_1}$	$\boxed{a_m \mid b_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_m \mid b_n}$

Аналогично можно доказать, что множество $A \times B \times C$, состоящее из упорядоченных троек, содержит mnp элементов (p – число элементов в множестве C). Действительно, карточек вида $\boxed{a \mid b \mid c_1}$ столько, сколько элементов в $A \times B$, т.е. mn, столько же карточек вида $\boxed{a \mid b \mid c_2}$ и т.д. В этом случае $A \times B \times C$ можно представить в виде прямоугольного параллелепипеда.

Вообще, множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$ состоит из $n_1 n_2 \ldots n_p$ элементов, где n_1 – число элементов в A_1, n_2 – в A_2 и т.д. Доказывается это утверждение индукцией по p аналогично рассмотренному выше переходу от $p = 2$ к $p = 3$.

Для решения задач комбинаторики удобна следующая формулировка правила произведения.

Пусть объект a_1 можно выбрать n_1 различными способами, после каждого выбора объекта a_1 объект a_2 можно выбрать n_2 различными способами, ..., после каждого выбора объектов a_1, a_2, ..., a_{p-1} объект a_p можно выбрать n_p различными способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать a_1, a_2, ..., a_p, равно $n_1 n_2 \dots n_p$.

Действительно, если A_k – множество состояний, из которых выбирается объект a_k, то n_k – число элементов множества A_k ($k = 1,2,..., p$), и мы получаем известную нам формулировку правила умножения.

Вернемся к примеру 1. Пусть a_1 – первая буква слова, тогда её можно выбрать 8 способами, т.е. $n_1 = 8$; вторую букву a_2 можно выбрать 7 способами, т.е. $n_2 = 7$ и т.д. По правилу умножения число всех комбинаций равно

$$8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Замечание. Мы видим, что правило произведения само по себе очень простое. При решении комбинаторных задач с помощью этого правила основная трудность заключается в выборе множества A_k (первая формулировка правила) или объектов a_k (вторая формулировка правила), т.е. в формализации задачи.

Разберём несколько примеров на применение правила произведения.

Пример 2. Сколько четырёхбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?

Пусть a_k – k-я буква слова (k =1,2,3,4). Тогда $n_1 = 8$, $n_2 = 7$, $n_3 = 6$, $n_4 = 5$ и по правилу произведения сразу получаем ответ: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Ответ: 1680.

Пример 3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладью так, чтобы они не били друг друга?

Выбор объекта a_1 – поля для белой ладьи – может быть сделан $n_1 = 64$ способами. Независимо от выбора этого поля белая ладья бьёт 15 полей, поэтому для чёрной ладьи остается 64-15 =49 полей: $n_2 = 49$.

Ответ: число расстановок ладей равно $64 \cdot 49 = 3136$.

В разобранной задаче вопрос о том, считаем ли мы ладьи одинаковыми, возникнуть не мог. Но во многих задачах с однородными объектами, приступая к решению, надо ясно представлять, считаются ли эти объекты неразличимыми.

Пример 4. Сколькими способами можно поставить на доску восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

В этой задаче подразумевается (хотя прямо и не говорится), что ладьи одинаковые, неразличимые. Очевидно, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали должна стоять только одна ладья. Будем расставлять ладьи последовательно, начиная с первой горизонтали. На первой горизонтали 8 клеток, и первую ладью можно поставить на любую из них. Когда мы будем ставить вторую ладью, то на второй горизонтали ей будут доступны 7 клеток и т.д. По правилу произведения получаем, что всего таких позиций 8!

Если же считать ладьи различными (как в примере 3), то число перестановок ладей равно

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (8!)^2$$

Действительно, для первой ладьи можно выбрать любое поле доски размером 8×8, вторая ладья фактически ставится на квадратную доску 7×7 (мы удалили одну горизонталь и одну вертикаль и «сдвинули» оставшиеся части доски) и т.д.

Зафиксируем одну из таких расстановок различных ладей. Число перестановок ладей на выделенных полях равно 8! (результат примера 1). Если мы считаем ладьи одинаковыми, то $(8!)^2$ позиций разбиваются на классы по 8! позиций в каждом, и все позиции данного класса будут одинаковыми. Поэтому число перестановок одинаковых ладей равно $(8!)^2 / 8! = 8!$, что совпадает с ранее полученным ответом.

Второе решение, проведённое в два этапа, в данном случае не является оптимальным, однако бывают ситуации, в которых применение такой схемы становится естественным.

Пример 5. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

В слове «комбинаторика» 13 букв. Если бы все они были различны, то, переставляя их, можно было бы получить 13! слов. Но в нашем слове буквы к, о, и, а встречаются по два раза. Обозначим их $к_1, к_2, о_1, о_2, и_1, и_2, а_1, а_2$. Ясно, что слова, отличающиеся перестановкой букв $к_1$ и $к_2$ – одинаковые, так что 13! слов разбиваются на пары одинаковых. Следовательно, если мы не различаем $к_1$ и $к_2$, то число всех слов будет равно 13!/2!. Но эта совокупность также разбивается на пары одинаковых с точки зрения буквы «о» слов и т.д.

Ответ: $\dfrac{13!}{2!2!2!2!} = \dfrac{13!}{16}$.

Пример 6. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные? Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Всего нечётных цифр – пять, поэтому выбор *k*-й цифры числа может быть сделан $n_k = 5$ способами (*k* =1, 2, 3, 4). Количество четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Чтобы ответить на второй вопрос, проще не определять последовательно, сколько существует чисел, в записи которых ровно одна чётная цифра, две, три, четыре, а воспользоваться полученным ответом на первый вопрос. Все четырёхзначные числа, а их 9999-999=9000, делятся на две группы: те, в записи которых все цифры нечётные, и те, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра. Следовательно, количество чисел второго типа равно 9000-625=8375.

Ответ: 8375.

Обратите внимание на идею, которую мы использовали – переход к дополнению изучаемого множества. Это пример применения второго общего правила комбинаторики – **правила суммы.** Приведём это правило в двух формулировках (как и было дано правило произведения):

1) Если множество *A* состоит из *m* элементов, а множество *B* из *n* элементов, причём, эти множества не имеют общих элементов (т.е. $A \cap B = 0$), то их объединение $A \cup B$, т.е. совокупность всех элементов из *A* и *B*, содержит *m* + *n* элементов.

2) Если объект *a* можно выбрать *m* различными способами, а объект *b* можно выбрать *n* различными способами, причём результаты выбора объектов *a* и *b* никогда не совпадают, то выбор «либо *a*, либо *b*» можно осуществить *m* + *n* различными способами.

Часто в задачах приходится применять сразу оба правила комбинаторики.

Пример 7. Сколько различных пар можно образовать из 28 костей домино так, чтобы кости, входящие в пару, можно было приложить друг к другу?

Выбор пары костей – это выбор двух карточек вида $\boxed{a_1}\boxed{b_1}$, $\boxed{a_2}\boxed{b_2}$, где можно считать, что $a \le b$. По условию надо найти число всех таких неупорядоченных пар, но ясно, что их вдвое меньше, чем упорядоченных. Нам проще найти число упорядоченных пар, т.к. в этом случае можно применить правило произведения.

Выберем первую кость – это можно сделать 28 способами, из них в 7 случаях кость окажется дублем, т.е. кость вида $\boxed{a}\boxed{a}$, а в 21 случае – кость вида $\boxed{a}\boxed{b}$, $a < b$. В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами, а число способов выбора пары костей по правилу произведения равно $7 \cdot 6 = 42$.

Во втором случае вторую кость можно выбрать 12 способами — 6 костей вида $\boxed{a}\boxed{*}$ и 6 костей вида $\boxed{*}\boxed{a}$, а число способов выбора пары равно $21 \cdot 12 = 252$.

Следовательно по правилу суммы всего получается 42 + 252 = 294 способа выбора упорядоченной пары.

Ответ: 147 пар.

В последней задаче мы опять встретились с новой идеей: переходом от изучения неупорядоченных совокупностей элементов к изучению упорядоченных наборов.

Разберём ещё одну важную задачу, в решении которой применяется правило произведения.

Пример 8. Найти число подмножеств множества *A*, состоящего из *n* элементов.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, тогда с каждым подмножеством X множества A можно связать карточку-паспорт вида

0	1	0	...	1	1
1	2	3		$n-1$	n

В этом паспорте в k-й клетке стоит 1, если $a_k \in X$, 0 — если $a_k \notin X$. Ясно, что по каждому подмножеству X однозначно строится паспорт, но верно и обратное: каждый паспорт однозначно определяет множество X. В частности, паспорт из нулей соответствует пустому множеству, а паспорт из единиц — множеству A.

Но число таких паспортов по правилу произведения равно 2^n, т.к. каждая клетка может быть заполнена двумя способами независимо от того, как заполняются другие клетки.

Ответ: 2^n.

В предисловии уже говорилось, что некоторые стандартные схемы в комбинаторике получили свои названия. Среди них самыми важными являются понятия: «размещение», «перестановка» и «сочетание».

§ 2. Размещения и перестановки

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов ($k \le n$), то говорят, что из этого множества *произведена* выборка объема k (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об упорядоченной выборке, а если нет – о неупорядоченной.

Например, слово из 4 букв в примере 2 — это упорядоченная выборка объёма 4, а подмножества в примере 8 — неупорядоченные выборки из подмножества A. В то же время мы видели в примерах 5 и 6, что можно переходить от выборки одного вида к выборке другого вида.

Определение. Всякая упорядоченная выборка объёма k из множества, состоящего из n элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* и обозначается A_n^k.

Символ A_n^k читается: «а из n по k» или «число размещений из n по k». А – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

Определение. Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n.

Символ P_n происходит от французского слова Permutation – «перестановка».

В примере 1 мы нашли, что $P_8 = 8!$, с перестановкой мы встречались также в примерах 4 и 5.

В примере 2 с помощью правила умножения было найдено размещение из 8 элементов по 4: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. В общем случае справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1), \qquad (1)$$

где $1 \le k \le n$.

Доказательство этой формулы получается применением правила произведения. На первое место в выборке можно поместить любой из n элементов, на второе – любой из $(n – 1)$ оставшихся и т.д. После выбора элементов на $(k – 1)$-е место останется $n – (k – 1) = n – k +1$ элементов,

		...		
1	2		$k-1$	k

любой из которых можно поместить на k-е место. По правилу произведения получаем

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1).$$

В частности,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...\cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (2)$$

Формулы для A_n^k и P_n легко запоминаются, и их, конечно, надо знать. Но ещё важнее знать правило произведения, на основе которого выводятся эти формулы, т.к. многообразие ситуаций в комбинаторике не исчерпывается стандартными комбинациями, и многие задачи можно решить только при условии знания принципов комбинаторики.

Обратим внимание на то, что формулу (1) при $k<n$ можно записать следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Чтобы эта формула действовала и при $k = n$, примем по определению, что $0!=1$.

Возникает вопрос: к формуле (1) мы пришли, применяя правило произведения, а можно ли получить комбинаторными рассуждениями формулу (3)? Ответ: да, можно. Из каждого размещения из n элементов по k можно получить перестановку из n элементов, если в произвольном порядке дописать остальные $(n - k)$ элементов:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{\;\dots\;}\boxed{}}_{k}\underbrace{\boxed{}\boxed{\;\dots\;}\boxed{}}_{n-k}$$

Разные перемещения при любых «добавлениях» будут порождать разные перестановки, а каждое добавление может быть сделано $(n - k)!$ различными способами. Поэтому по правилу произведения

$$P_n = A_n^k P_{n-k},$$

а это и есть формула (3).

Пример 9. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбирать из множества $\{1, 2, ..., 9\}$ и число вариантов равно $A_9^5 = \dfrac{9!}{4!} = 15120$. Если число оканчивается цифрой 5, то в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 – нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным. Цифры со второй по четвёртую можно выбрать $A_8^4 = 1680$ различными способами. Следовательно, по правилу произведения имеется $8 \cdot A_8^4$ чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.

$$A_9^5 + 8 \cdot A_8^4 = 28560.$$

Ответ: 28560.

Пример 10. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Чтобы решить задачу, проведём мысленный эксперимент: представим себе, что тома 1 и 2 связаны бечёвкой. Расстановка полученного набора из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена 9! способами.

Ответ: 9!

§ 3. Сочетания

Определение. Всякая неупорядоченная выборка объёма k из множества, состоящего из n элементов ($k \le n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через C_n^k.

Символ C_n^k читается: «це из n по k» или «число сочетаний из n по k». C – первая буква французского слова Combinaison – «сочетание».

Выведем формулу для нахождения C_n^k. Из любого набора, содержащего k элементов, можно с помощью перестановок получить $k!$ упорядоченных выборок объёма k, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Отметим, что формула (4) справедлива при $k = 0$, т.к. мы условились считать, что 0!=1. Выпишем несколько частных случаев формулы (4):

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример 11. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестёрку, состоящую из вратаря, двух защитников и трёх нападающих?

Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, защитников – $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способом, нападающих – $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ способами. Всего, по правилу произведения, существует $2 \cdot 21 \cdot 120 = 5040$ способов выбора стартовой шестёрки.

Ответ: 5040.

Пример 12. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых и число треугольников, образованных этими прямыми.

Число точек пересечения прямых равно числу способов выбора неупорядоченной пары прямых, т.е. C_n^2. Аналогично, каждый треугольник определяется тройкой прямых, поэтому общее число треугольников равно C_n^3.

Ответ: C_n^2 и C_n^3.

Пример 13. Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

Задачи для первого варианта можно выбрать C_{28}^7 способами. После этого останется 21 задача, так что второй вариант можно составить C_{21}^7 способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать C_{14}^7 способами, а для четвёртого – $C_7^7 = 1$ способом.

По правилу произведения получаем число $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7$. Но так как варианты равноправны, то полученное число надо разделить на 4!

Ответ: $\frac{1}{4!} C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = \frac{28!}{4!(7!)^4}$.

Отметим, что полученное число имеет порядок 10^{13}; число n! с ростом n растёт очень быстро: например, если 10! = 3 628 800, то 20! = 2 432 902 008 176 640 000.

С точки зрения теории множеств C_n^k – это число всех подмножеств из k элементов, которые можно выбрать из множества, состоящего из n элементов. Поэтому равенство $C_n^0 = 1$ означает, что всякое пустое подмножество только одно; $C_n^1 = n$ – что число одноэлементных подмножеств равно n и т.д.

Этот взгляд на числа C_n^k позволяет найти комбинаторный смысл следующих арифметических свойств чисел C_n^k:

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$, если $0 \le k \le n$;

2°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \le k \le n-1$;

3°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Свойство 1° сразу получается из формулы (4):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k,$$

но ясен и его комбинаторный смысл. Выбрав множество из k элементов, мы одновременно получаем подмножество из ($n - k$) элементов. Например, если из n учеников класса выбирают k человек для поездки на олимпиаду в Москву, то однозначно определяются ($n - k$) таких, которые в Москву не поедут, и наоборот.

Свойство 2° также легко доказывается, если воспользоваться формулой (4):

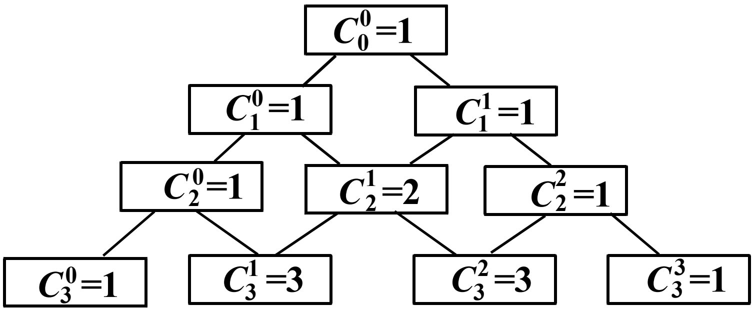
$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Комбинаторный смысл свойства 2° выясняется с помощью правила суммы. Предположим, что в классе из n учеников появился новый ученик, и на олимпиаду в Москву решили отправить команду из k + 1 человек. Все такие команды можно разделить на две группы: те команды, в которые входит новичок, и те, в которые он не входит. Число команд в первой группе равно C_n^k – надо дополнить команду k учениками, выбрав их из n оставшихся, а во второй группе число команд равно C_n^{k+1}. Следовательно, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Свойство 2° позволяет последовательно находить числа C_n^k. В самом деле,

$$C_1^0 = C_1^1 = 1.$$
$$C_2^0 = C_2^2 = 1, \quad C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 2,$$
$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 3, \quad C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 3,$$
$$C_4^0 = C_4^4 = 1, C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 4, C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 6, C_4^3 = C_3^2 + C_3^3 = 4$$

и т.д. Если принять соглашение, что $C_0^0 = 1$, то все числа C_n^k можно расположить на плоскости в виде бесконечной таблицы, которая называется треугольником Паскаля:



В этой таблице в строке с номером n (n = 1, 2, ...) каждое число (кроме двух крайних) равно сумме двух «соседних» с ним чисел строки с номером n – 1.

Приведём аналитическое доказательство свойства $3°$, основанное на свойствах треугольника Паскаля. Положим

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Так как каждое число строки с номером n входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки, то $S_{n+1} = 2S_n$. Следовательно, $S_{n+1} = 2S_n = 2^2 S_{n-1} = \cdots = 2^{n+1} S_0 = 2^{n+1}$, т.к. $S_0 = 1$.

Другое *комбинаторное* доказательство свойства $3°$ фактически было получено в примере 8. Там было найдено, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. С другой стороны, как мы уже отмечали, C_n^k – это число всех подмножеств, состоящих из k элементов, поэтому число всех подмножеств равно (правило суммы)

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n.$$

Следовательно, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

§ 4. Бином Ньютона

Школьникам хорошо известны формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ и } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

А можно ли при каждом натуральном *n* найти аналогичную формулу для $(a+b)^n$? Такая формула существует и по традиции называется «биномом Ньютона», хотя была известна математикам ещё в средние века. Биномом называется выражение $a+b$ (буквальный перевод: две части).

Справедлива следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n. \qquad (5)$$

Доказательство. Если, не приводя подобные члены, перемножить *n* скобок $(a+b)$, то получится сумма, состоящая из слагаемых вида $a^{n-k}b^k, k = 0, 1, ..., n.$ Для данного *k* слагаемое $a^{n-k}b^k$ получается только в том случае, если в каких-то *k* скобках мы возьмем *b*, а остальных (*n* – *k*) скобках – *a*. Следовательно, число слагаемых вида $a^{n-k}b^k$ будет равно числу способов, которыми можно выбрать (без учета порядка выбора) *k* скобок из *n* скобок, т.е. C_n^k. Утверждение доказано.

Замечание. Числа C_n^k часто называют биномиальными коэффициентами. Отметим, что биномиальные коэффициенты в формуле (5) составляют строку с номером *n* в треугольнике Паскаля.

Если в формуле (5) взять $a = b = 1$, то получится известное нам свойство 3° чисел C_n^k, а если взять $a = 1, b = -1,$ то получим ещё одно комбинаторное равенство:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Формула бинома Ньютона производит сильное впечатление и попала даже в художественную литературу.

Лев Толстой в автобиографии «Детство. Отрочество. Юность» описывает паническое состояние героя Николая Иртеньева, которому на экзамене в университете достался билет с биномом Ньютона.

У Конан Дойля Холмс так описывает Ватсону профессора Мориарти: «Когда ему исполнился двадцать один год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность».

Можно вывести формулу, аналогичную формуле бинома, позволяющую находить степени большого числа слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_s=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}\ , \qquad (6)$$

где суммирование производится по всем всевозможным наборам неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$, сумма которых равна n. Коэффициент $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$ напоминает ответ в примере 5, и действительно, число слагаемых вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$, равно числу «слов», которые можно составить из n букв, среди которых k_1 «букв» a_1, k_2 «букв» a_2 и т.д.

Формула (6) называется *полиномиальной.* Например,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$$

Рассмотрим в заключение несколько задач, связанных с формулой биному Ньютона.

Пример 14. Найти n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

В n-й строке треугольника Паскаля два коэффициента равны в том и только том случае, когда они занимают клетки, равноудаленные от крайних. Действительно, треугольник Паскаля симметричен: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а при движении от края к середине строки коэффициенты возрастают: $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$. Следовательно, C_n^5 равно C_n^{12} тогда и только тогда, когда $12 = n - 5$, т.е. $n = 17$.

Ответ: $n = 17$.

Пример 15. Найти коэффициент при x^{19} в разложении $(1+x^5+x^9)^{30}$.

Решим задачу двумя способами.

1) В силу формулы (6)

$$(1+x^5+x^9)^{30} = \sum_{k_1+k_2+k_3=30} \frac{30!}{k_1!k_2!k_3!} 1^{k_1} x^{5k_2} x^{9k_3}.$$

Так как уравнение $5k_2+9k_3=19$ имеет только одно решение в неотрицательных целых числах: $k_2=2,\ k_3=1$, то коэффициент при x^{19} равен

$$\frac{30!}{27!2!1!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{2} = 12180.$$

2) Обозначим через $y = x^5(1+x^4)$. Тогда

$$(1+x^5+x^9)^{30} = (1+y)^{30} = 1 + C_{30}^1 y + \cdots + C_{30}^k y^k + \cdots + y^{30}.$$

Рассмотрим *k*-е слагаемое ($0 \le k \le 30$):

$$C_{30}^k y^k = C_{30}^k x^{5k}(1+x^4)^k = C_{30}^k x^{5k}(1 + C_k^1 x^4 + \cdots + C_k^m x^{4m} + \cdots x^{4k}).$$

Такое слагаемое будет содержать x^{19}, если для некоторого m выполняется равенство $5k+4m=19$. Ясно, что это возможно только при $k=3$ и $m=1$. Следовательно, коэффициент при x^{19} равен $C_{30}^3 C_3^1 = 12180$.

Литература:

1. Кутасова А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х., Пособие по математике для поступающих в вузы. /под ред. Г.Н. Яковлева — М.: Наука, 1988.

2. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.

3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994.

Контрольные вопросы

1. Сколькими способами можно выбрать из слова «весна» одну гласную и одну согласную буквы?
2. Сколько диагоналей в выпуклом 2010-угольнике?
3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $k + nm = 5$?
4. Чему равен коэффициент при $x^3 y^{2007}$ в выражении $(x+y)^{2010}$ после раскрытия скобок?
5. Сколько делителей у числа 2010?

Задачи

1(3). Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «уравнение»?
2(3). Сколькими способами можно переставлять буквы слова «уравнение» так, чтобы две буквы «е» не шли подряд?
3(3). Известно, что никакие три диагонали выпуклого восьмиугольника не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.
4(4). Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного королей так, чтобы они не били друг друга?
5(4). Докажите тождество

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

6(4). Сколько существует шестизначных чисел, у которых сумма цифр – чётная?
7(4). Сколько существует шестизначных чисел, у которых три цифры чётные, а три – нечётные?
(В задачах №6 и №7 предполагается, что первая цифра шестизначного числа отлична от нуля).
8(5). Докажите неравенство

$$(n!)^2 \geq n^n.$$

9(5). Сколькими способами можно распределить 12 различных книг по трём полкам так, чтобы на каждой полке оказалось ровно 4 книги?
10(5). Сколькими способами можно распределить 12 одинаковых книг по трём полкам так, чтобы на каждой полке была хотя бы одна книга?

Замечание! В задачах №9 и № 10 все полки разные!

11(5). Найдите наибольший коэффициент многочлена $(2+x)^8$.

12(5). Найдите коэффициент при x^{17} в разложении $\left(1+x^5+x^7\right)^n$.

