

§ 2. Размещения и перестановки

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов ($k \leq n$), то говорят, что из этого множества *произведена* выборка объема k (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об упорядоченной выборке, а если нет – о неупорядоченной.

Например, слово из 4 букв в примере 2 — это упорядоченная выборка объема 4, а подмножества в примере 8 — неупорядоченные выборки из подмножества A . В то же время мы видели в примерах 5 и 6, что можно переходить от выборки одного вида к выборке другого вида.

Определение. Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* и обозначается A_n^k .

Символ A_n^k читается: «а из n по k » или «число размещений из n по k ». А – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

Определение. Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n .

Символ P_n происходит от французского слова *Permutation* – «перестановка».

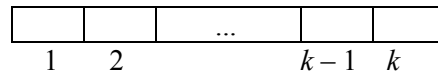
В примере 1 мы нашли, что $P_8 = 8!$, с перестановкой мы встречались также в примерах 4 и 5.

В примере 2 с помощью правила умножения было найдено размещение из 8 элементов по 4: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. В общем случае справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1), \quad (1)$$

где $1 \leq k \leq n$.

Доказательство этой формулы получается применением правила произведения. На первое место в выборке можно поместить любой из n элементов, на второе – любой из $(n-1)$ оставшихся и т.д. После выбора элементов на $(k-1)$ -е место останется $n - (k-1) = n - k + 1$ элементов,



любой из которых можно поместить на k -е место. По правилу произведения получаем

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

В частности,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (2)$$

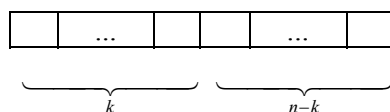
Формулы для A_n^k и P_n легко запоминаются, и их, конечно, надо знать. Но ещё важнее знать правило произведения, на основе которого выводятся эти формулы, т.к. многообразие ситуаций в комбинаторике не исчерпывается стандартными комбинациями, и многие задачи можно решить только при условии знания принципов комбинаторики.

Обратим внимание на то, что формулу (1) при $k < n$ можно записать следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (3)$$

Чтобы эта формула действовала и при $k = n$, примем по определению, что $0! = 1$.

Возникает вопрос: к формуле (1) мы пришли, применяя правило произведения, а можно ли получить комбинаторными рассуждениями формулу (3)? Ответ: да, можно. Из каждого размещения из n элементов по k можно получить перестановку из n элементов, если в произвольном порядке дописать остальные $(n - k)$ элементов:



Разные перемещения при любых «добавлениях» будут порождать разные перестановки, а каждое добавление может быть сделано $(n - k)!$ различными способами. Поэтому по правилу произведения

$$P_n = A_n^k P_{n-k},$$

а это и есть формула (3).

Пример 9. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбирать из множества $\{1, 2, \dots, 9\}$

и число вариантов равно $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 15120$. Если число оканчивается

цифрой 5, то в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 – нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным. Цифры со второй по четвертую можно выбрать $A_8^4 = 1680$ различными способами. Следовательно, по правилу произведения имеется $8 \cdot A_8^4$ чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.

$$A_9^5 + 8 \cdot A_8^4 = 28560.$$

Ответ: 28560.

Пример 10. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Чтобы решить задачу, проведём мысленный эксперимент: представим себе, что тома 1 и 2 связаны бечёвкой. Расстановка полученного набора

из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена $9!$ способами.

Ответ: $9!$