

§ 12. Примеры решения задач

Задача 12.1. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране $\mathcal{Э}$, расположенном на расстоянии $L = 4,9F$ от циферблата наручных часов $\mathcal{Ц}$,

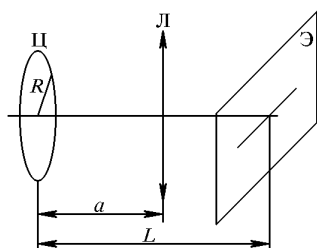


Рис. 12.1

получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой $R = 1,5$ см (рис. 12.1). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата часов и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения кончика изображения стрелки на экране? (МФТИ, 1997 г.)

Решение. Запишем уравнение тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} = \frac{1}{F} \Rightarrow a^2 - La + LF = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 3,5F; \quad a_2 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 1,4F.$$

Так как по условию изображение уменьшенное, то $a = 3,5F$, следовательно,

$$b = L - a = 1,4F, \text{ увеличение } \Gamma = \frac{b}{a} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4.$$

Длина изображения стрелки $R' = R\tilde{\Delta} = 1,5\tilde{\mu} \cdot 0,4 = 0,6 \text{ см}$, скорость

$$v = R'\omega = R' \frac{2\pi}{T} = 0,6 \frac{2\pi}{60} \approx 0,063 \text{ см/с}.$$

Задача 12.2. На главной оптической оси тонкой положительной линзы диаметром D находится точечный источник света. Из линзы выходит расходящийся пучок лучей с максимальным углом отклонения лучей от главной оптической оси α . Определить максимальный угол отклонения β , если вместо положительной линзы на то же место поставить отрицательную линзу того же диаметра и с тем же фокусным расстоянием. Расстояние между источником и линзой равно d (МФТИ, 1982 г.).

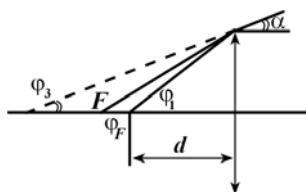


Рис. 12.2

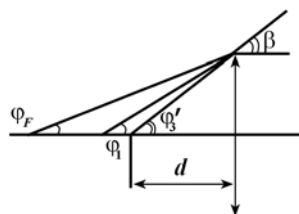


Рис. 12.3

Решение. Максимальный угол отклонения луча от оптической оси будет наблюдаться при прохождении луча через край линзы (на расстоянии $D/2$ от её оптического центра). В приближении парааксиальной оптики для положительной линзы (формула (8.12)) запишем: $\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F$, где (рис. 12.2):

$$\varphi_1 \approx \frac{D}{2d}, \quad (12.1)$$

а $\varphi_3 = \alpha$ по построению, следовательно,

$$\varphi_1 - \alpha = \varphi_F \quad (12.2)$$

Для отрицательной линзы $\varphi'_3 - \varphi_1 = \varphi_F$ (см. рис. 12.3). Но по построению

$$\varphi'_3 = \beta \Rightarrow \beta - \varphi_1 = \varphi_F \quad (12.3)$$

Решая совместно уравнения (12.2) и (12.3), получаем

$$\beta = 2\varphi_1 - \alpha,$$

или, с учётом (12.1)

$$\beta = \frac{D}{d} - \alpha.$$

Некоторые учащиеся решили задачу «точно». В этом случае они получили ответ:

$$\beta = \arctg[D/d - \tg \alpha].$$

Но, строго говоря, это превышение точности того приближения, в котором были получены формулы тонкой линзы.

Задача 12.3. Тонкая линза создаёт на экране изображение предмета в 20 раз большее, чем предмет. Экран передвинули вдоль оси линзы на 4 м. Чтобы получить резкое изображение, предмет пришлось переместить на 40 см. Каким, при этом, стало увеличение? В какую сторону – к линзе или от линзы – переместили предмет? (МФТИ, 1982 г.)

Решение. Продольное увеличение $\Gamma_{12} = \left| \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right|$, где

$$|b_1 - b_2| = 4 \text{ м}, \quad |a_1 - a_2| = 0,4 \text{ м} \Rightarrow \Gamma_{12} = 10.$$

По условию $\Gamma_1 = 20$. Согласно формуле (11.5),

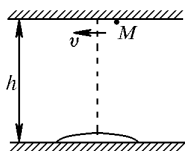
$$\Gamma_{12} = \Gamma_1 \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_1} \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{10}{20} = 0,5.$$

Таким стало поперечное увеличение.

По определению $\tilde{A} = \frac{b}{a}$. Так как Γ уменьшилось, расстояние от предмета до

линзы должно быть увеличено. Следовательно, предмет переместили от линзы.

Задача 12.4. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см. По потолку ползёт муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 220$ см (рис. 12.4).



1). На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе?

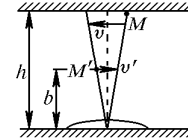
Рис. 12.4

2) Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы? (МФТИ, 1998 г.)

Решение. Луч света после прохождения линзы отражается от зеркала и проходит сквозь линзу еще раз. Таким образом, оптическая сила системы «линза + зеркало» в два раза больше оптической силы одной линзы: $P_{\text{сист}} = 2 / F$.

Расстояние от центра зеркала (и линзы) до изображения мухи найдём с помощью формулы линзы:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{h} = \frac{2}{F} \Rightarrow b = \frac{hF}{2h - F}; b = 22 \text{ см.}$$



Скорость изображения мухи найдём из соотношения подобия (рис. 12.5):

$$\frac{v \Delta t}{h} = \frac{v' \Delta t}{b} \Rightarrow v' = v \frac{b}{h}; v' = 0,2 \text{ см/с.}$$

Рис. 12.5

Задача 12.5. Тонкая плоско-вогнутая линза с фокусным расстоянием $F = 15$ см приклеена плоской стороной к стенке аквариума, заполненного водой ($n = 4/3$). На линзу под углом α к главной оптической оси падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от её оптического центра, не изменяет своего направления. Найти h , если $\text{tg} \alpha = 0,08$ (МФТИ, 1993 г.).

Решение. Если бы за линзой не было аквариума, то $\beta - \alpha = \varphi_F$. (12.4)

Наличие аквариума приводит к тому, что

$$\beta = n\beta', \quad (12.5)$$

где β' – угол между лучом в воде и главной оптической осью (рис. 12.6). По условию $\beta' = \alpha$. Решая (12.4) и (12.5), получим: $\varphi_F = (n - 1)\alpha$.

С другой стороны, $\varphi_F = h / F$, $h = F(n - 1)\alpha$.

Численная подстановка дает: $h = 0,4$ см.

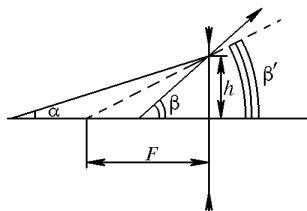


Рис. 12.6