

§ 11. Поперечное и продольное увеличение

Рассмотрим линейный предмет AB , находящийся перед оптической системой (например, линзой) и его изображение A_1B_1 (рис. 11.1).

Определение. Увеличением оптической системы называется отношение величины изображения предмета к величине самого предмета.

Здесь полезно выделить два основных случая.

1) Предмет лежит в плоскости, расположенной перпендикулярно главной оптической оси системы, возникающее при этом увеличение называется поперечным. Будем обозначать его Γ .

Для тонких линз все необходимые формулы вы можете получить самостоятельно, поэтому ниже предлагается только окончательный результат:

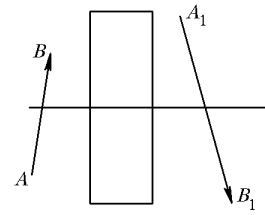


Рис. 11.1

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{b - F}{F} = \frac{F}{a - F}. \quad (11.1)$$

Все размеры следует брать с соответствующими знаками.

Иногда наряду с поперечным увеличением Γ используют угловое увеличение Γ_φ . По определению

$$\Gamma_\varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \quad (11.2)$$

(Углы φ_1 и φ_2 изображены на рис. 11.2) Несложно доказать, что $\Gamma_\varphi \Gamma = 1$.

2) Предмет расположен вдоль главной оптической оси и лежит на ней. Возникающее при этом увеличение называется продольным. Получим формулу для продольного увеличения, создаваемого тонкой линзой:

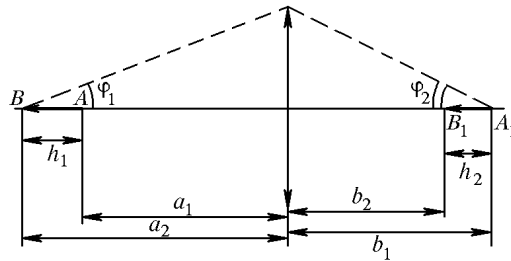


Рис. 11.2

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}. \quad (11.3)$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}. \quad (11.4)$$

Объединим (11.3) и (11.4)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2} \Rightarrow \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}.$$

Поскольку $|b_1 - b_2| = h_2$, $|a_2 - a_1| = h_1$ и $\frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1$, $\frac{b_2}{a_2} = \Gamma_2$,

окончательно запишем, что продольное увеличение

$$\Gamma_{12} = \frac{h_2}{h_1} = \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (11.5)$$

Если $h_1 \ll a_1, a_2$ и $h_2 \ll b_1, b_2$, то

$$\Gamma_{12} \approx \Gamma^2. \quad (11.6)$$

Задача 11.1. Букашка ползёт со скоростью $v_0 = 0,2$ см/с в сторону тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 6$ см вдоль прямой, параллельной главной оптической оси линзы и отстоящей от оси на расстояние $a = 3$ см (рис. 11.3). Найти скорость перемещения изображения букашки, когда она находится на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы.

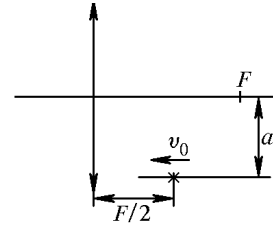


Рис. 11.3

Решение. Допустим, что за малый промежуток времени Δt букашка проползла

расстояние $\Delta x = v_0 \Delta t$. В соответствии с формулой (11.5) изображение букашки сместится вдоль оси линзы на расстояние $\Delta x_1 = \Delta x \Gamma^2$, где

$$\Gamma = \frac{F}{a - F} = \frac{6}{3 - 6} = -2.$$

Знак «минус» означает, что изображение мнимое, т.е. находится с той же стороны от линзы, что и букашка (рис. 11.4). Из построения видно, что перемещение изображения букашки $\Delta l = \Delta x_1 / \cos \alpha$.

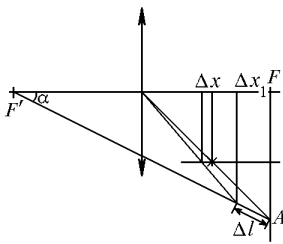


Рис. 11.4

В прямоугольном треугольнике $F'FA$ катеты AF и FF' относятся, как 1:2. Отсюда находим $\cos \alpha = 2 / \sqrt{5}$. Следовательно скорость перемещения изображения букашки

$$v_1 = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1}{\cos \alpha \cdot \Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Gamma^2}{\cos \alpha} = v_0 \frac{\Gamma^2}{\cos \alpha}.$$

Численный ответ: $\nu_1 \approx 0,9$ см/с.

Примечание. В данной задаче приближения параксиальной оптики не выполняются, поэтому использованные нами формулы также неточны. Полученный ответ нужно рассматривать только, как весьма приближённый, и вычисление ν_1 с большей точностью не правомерно (в решениях этой задачи автор встречал ответ $\nu_1 = 0,894$ см/с).

Иногда требуется получить увеличенное мнимое изображение мелких предметов. В этом случае применяют лупу или микроскоп.

Лупа — это положительная линза с небольшим фокусным расстоянием ($10\text{мм} < F < 100\text{мм}$), располагаемая между рассматриваемым предметом и глазом. Обычно лупу располагают непосредственно возле глаза (как очки), а предмет — вблизи фокуса так, чтобы его мнимое изображение находилось на расстоянии наилучшего зрения a_n . При этом оказывается, что видимое увеличение предмета

$$N \approx \frac{a_n}{F}. \quad (11.7)$$

Микроскоп, как и лупа, увеличивает видимые угловые размеры исследуемых объектов. Но поскольку фокусное расстояние системы линз, входящих в микроскоп, ещё меньше, чем у лупы, то его увеличение (см. формулу (11.7)) может достигать нескольких сотен!