§ 8. Тонкие линзы

Применим разработанную нами методику для исследования свойств оптических линз. Из произвольной точки C_1 проведём сферическую поверхность радиуса r_1, разделяющую пространство на две половины. Пусть в левой половине простран-

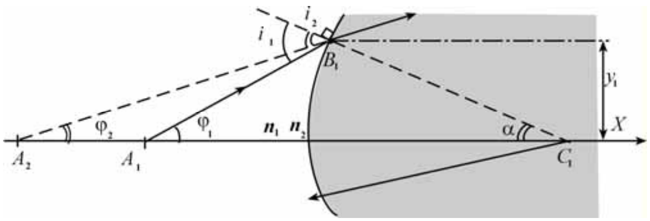

Рис. 8.1

ства показатель преломления равен n_1, а в правой – n_2, причём, для определённости, будем считать, что $n_2 > n_1$. Проведём через точку C_1 ось X (рис. 8.1). Это – главная оптическая ось системы. Поместим на ней точечный источник света A_1 и рассмотрим один из лучей, распространяющихся от этого источника вправо до точки B_1, лежащей на границе раздела двух сред. Для треугольника $A_1B_1C_1$ угол падения i_1 – внешний, поэтому в соответствии с теоремой о внешнем угле треугольника $i_1 = \varphi_1 + \alpha$.

В точке B_1 луч света преломится и, изменив направление своего движения, пойдёт так, как будто он был испущен в точке A_2 и все время распространялся прямолинейно. Для треугольника $A_2B_1C_1$ внешним будет угол преломления i_2, и поэтому $i_2 = \varphi_2 + \alpha$. Подставим найденные выражения для углов i_1 и i_2 в приближённый закон Снелла (5.1): $n_1 i_1 = n_2 i_2$. Получится

$$(\varphi_1 + \alpha)n_1 = (\varphi_2 + \alpha)n_2. \qquad (8.1)$$

В рамках приближения параксиальной оптики $\alpha = y_1 / r_1$, поэтому из (8.1) следует:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_2 n_2 = p_1 y_1. \qquad (8.2)$$

Здесь мы ввели величину $p_1 = \dfrac{n_2 - n_1}{r_1}$, называемую *оптической силой преломляющей поверхности*. Данное обозначение весьма полезно, т.к. оптическая сила зависит только от свойств этой поверхности и одинакова для всех лучей!

Теперь предположим, что на пути луча оказалась другая сферическая поверхность с радиусом r_2, разделяющим пространство на области с показателями преломления n_2 и n_3. Среду с показателем преломления n_2, ограниченную поверхностями r_1 и r_2, назовём *линзой*.

Введём одно определение: радиус кривизны оптической поверхности считается положительным, если центр кривизны расположен справа от неё, в противном случае, *радиус будет отрицательным.*

Пусть $n_2 > n_3$ и r_2 – отрицателен. Рассуждая аналогично ранее рассмотренному случаю, мы получим:

$$\varphi_2 n_2 - \varphi_3 n_3 = p_2 y_2, \tag{8.3}$$

где

$$p_2 = \frac{n_3 - n_2}{r_2}. \tag{8.4}$$

Поскольку в уравнения (8.2) и (8.3) входит общее слагаемое: $\varphi_2 n_2$, мы можем объединить эти два уравнения в одно, исключив $\varphi_2 n_2$:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 y_1 + p_2 y_2). \tag{8.5}$$

Если расстояние между боковыми поверхностями линзы столь мало, что изменение высоты луча внутри линзы при любом φ_1 можно не учитывать (не забывайте, что угол φ_1 мал), то такая линза называется *тонкой.*

Для тонкой линзы мы можем опустить индексы у высоты луча «y». Тогда (8.5) примет вид:

$$\varphi_1 n_1 - \varphi_3 n_3 = (p_1 + p_2) y. \tag{8.6}$$

Из (7.6) следует первый вывод: *оптическая сила двух близко расположенных преломляющих поверхностей равна их сумме*: $p_{\text{общ}} = p_1 + p_2$.

Применительно к тонкой линзе этот вывод можно сформулировать так: оптическая сила линзы равна сумме оптических сил её преломляющих поверхностей.

Если справа и слева от линзы находится воздух (это наиболее типичная ситуация), то $n_1 = n_3 = 1$, и

$$p_{\text{общ}} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{8.7}$$

формула (8.5) стала ещё проще:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_F \,. \qquad (8.8)$$

В правой части (8.8) стоит выражение $\varphi_F = y \cdot p_{\text{общ}}$, где

$$p_{\text{общ}} = \frac{1}{F} = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (8.9)$$

Здесь F имеет размерность длины. Её физический смысл мы скоро выясним.

Будем считать острый угол между лучом света и положительным направлением оси X положительным, если он отсчитывается от оси X против часовой стрелки. В противном случае угол будет отрицательным.

В принятых нами обозначениях угол φ_3 отрицателен, т.к. он отсчитывается от главной оптической оси по часовой стрелке. Точно также отрицателен и радиус r_2 (см. определение на стр. 14). Если брать только абсолютные величины углов, то вместо (8.8) следует записать

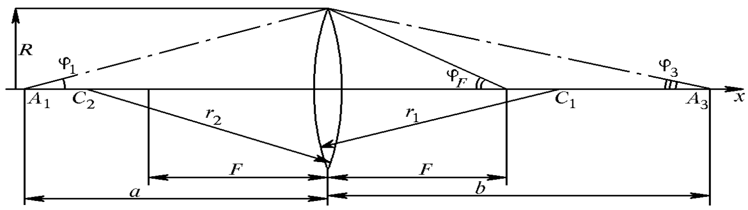

Рис. 8.2

$$|\varphi_1| + |\varphi_3| = \varphi_F \qquad (8.10)$$

Для тонкой линзы формула (8.10) позволяет дать простую и красивую физическую интерпретацию. Начнём отодвигать источник света всё дальше и дальше от линзы. Угол φ_1 при этом будет уменьшаться, и в пределе обратится в 0, а угол φ_3 станет равным φ_F.

Вот и проясняется физический смысл величины F. Все лучи, проходящие параллельно главной оптической оси системы (независимо от расстояния y до неё), преломившись в линзе, соберутся в одной точке, называемой *фокусом,* и отдалённой от линзы на расстояние F. Величина F называется *фокусным расстоянием* линзы. Стал ясен и физический (геометрический) смысл отношения

$y / F = \varphi_F$: φ_F – это угол, под которым из фокуса линзы видна точка, в которой произошло преломление падающего луча. Если принять $y = R$ (где R – радиус оправки линзы), то смысл соотношения (8.10) станет ещё проще:

сумма углов, под которыми виден край собирающей линзы из точек расположения источника света и его изображения, есть величина постоянная, равная углу, под которым из фокуса виден этот же край (рис. 8.2).

В задачах углы задают редко. Обычно известно расстояние от линзы до предмета или до его изображения и фокусное расстояние. Учитывая, что $|\varphi_1| \approx \frac{R}{a}, \varphi_F \approx \frac{R}{F}$, а $|\varphi_3| \approx \frac{R}{b}$, мы из (8.10) после сокращения на R получим знаменитое выражение для формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{8.11}$$

Стоит отметить, что, хотя для практических вычислений формула (8.11) значительно удобнее формулы (8.10), в последней записи совершенно исчезает ясное физическое содержание полученного нами закона, которому подчиняются все оптические лучи, проходящие через тонкие собирающие линзы.

Наконец, важно помнить, что формулы линзы получены нами в приближении параксиальной оптики и поэтому не следует их абсолютизировать.

Теперь попробуем извлечь пользу из полученных нами формул. Совершенно ясно, что если источник приблизить к линзе настолько, что он окажется к ней ближе, чем её передний фокус, то для сохранения смысла формулы (8.10) будет необходимо перед абсолютным значением величины угла φ_3 взять минус. Это означает, что изображение источника стало мнимым и находится с той же стороны от линзы, что и источник. Формулы же (8.10) и (8.11) примут вид

$$|\varphi_1| - |\varphi_3| = \varphi_F \tag{8.12}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{8.13}$$

Для наших рассуждений мы выбрали собирающую линзу. Но полученные формулы носят общий характер.

В самом деле, вернёмся к выражению (8.9). В нём величина $(n_2 - 1)$ положительная, а вот радиусы r_1 и r_2 могут иметь разные знаки. Всё зависит от того, с какой стороны находится центр кривизны соответствующих поверхностей. Мы уже видели, что для двояковыпуклой линзы $r_1 > 0, r_2 < 0$, А если линза двояковогнутая, т.е. ($r_1 < 0, r_2 > 0$), то фокусное расстояние окажется отрицательным, а значит *отрицательной* (рассеивающей) будет и линза. Иногда знак кривизны преломляющих поверхностей линзы задают иначе. Говорят, что если данная поверхность линзы выпуклая, её радиус кривизны положителен, а если вогнутая – отрицателен. При внимательном анализе оказывается, что оба подхода дают одинаковые результаты.

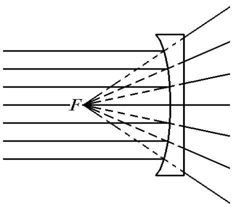

Рис. 8.3

Если фокусное расстояние линзы отрицательно, это приводит к перестановке переднего и заднего фокусов линзы. Фактически мы будем наблюдать следующее: параллельный пучок, падающий слева на линзу, после преломления всегда будет расходиться, причём исследователю, стоящему справа от линзы, будет казаться, что источник находится в переднем фокусе линзы (рис. 8.3).

При желании вы легко можете обобщить наши результаты на случай, когда линза находится не в воздухе, а в среде с показателем преломления *n,* отличным от 1, или когда слева и справа от линзы находятся среды с различными показателями преломления, или когда центры кривизны обеих поверхностей линзы лежат с одной стороны или…

