

Контрольные вопросы

В вопросах 1–8 рассматриваются точки $A(2; -2; -1)$, $B(10; -4; 1)$ и плоскость α , заданная уравнением $8x + y - 4z - 63 = 0$.

1(2). Найти угол между прямой AB и плоскостью α .

2(2). Составить уравнение плоскости β , проходящей через точку A и параллельной плоскости α . Найти расстояние между плоскостями α и β .

3(2). Составить уравнение плоскости γ , проходящей через точку A, B и начало координат. Найти угол между плоскостями α и γ .

4(2). Найти координаты точки A' – ортогональной проекции точки A на плоскость α .

5(2). Найти координаты точки A^* , симметричной точке A относительно плоскости α .

6(2). Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно плоскости α .

7(2). Составить уравнение сферы с центром в середине отрезка AB , касающейся плоскости α .

8(2). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AB .

9(4). Доказать, что 1) в правильном тетраэдре $ABCD$ противоположные рёбра AB и CD лежат на перпендикулярных скрещивающихся прямых; 2) отрезок MN , соединяющий середины этих рёбер, есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CD ; 3) длина отрезка $MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$, если ребро тетраэдра равно a .

10(3). Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на лучах DA, DB и DC . Доказать, что отношение объёмов пирамид $DABC$ и $DA_1B_1C_1$ равно отношению
$$\frac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA_1 \cdot DB_1 \cdot DC_1}.$$

11(3). Около сферы описан параллелепипед. Доказать, что площади всех его граней равны.

12*(3). Существует ли треугольная пирамида, в которой одна пара противоположных рёбер равна 3, другая пара противоположных рёбер равна 4, а третья пара равна 5?

Задачи

(задачи 1-4 из вариантов ЕГЭ, остальные из вариантов олимпиад различных вузов)

1(4). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = \sqrt{2}$ и $AC = \sqrt{6}$. Прямая A_1B образует угол 30° с плоскостью BB_1C_1C . Найти высоту призмы.

2(5). В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{10}$, $AD = 3\sqrt{10}$.

Высота параллелепипеда $AA_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Найти расстояние от точки A до плоскости A_1DB .

3(6). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$. Все боковые рёбра пирамиды равны между собой и равны $\sqrt{46}$. Точка M – середина ребра SB , точка K – середина ребра SC . Найти угол между прямыми AM и BK .

4(7). Отрезок AB – диаметр сферы, точки C и D лежат на сфере так, что объём пирамиды $ABCD$ наибольший возможный. Найти \sin угла между плоскостью ABC и прямой BP , где P – середина отрезка CD .

5(6). Даны координаты четырёх точек параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $A_1(-1; 0; 1)$ – вершина, $C(-2; 4; 0)$ – вершина, $M\left(\frac{1}{2}; 2; 1\right)$ – середина ребра DD_1 , $O\left(-3; \frac{7}{2}; 1\right)$ – центр грани BB_1C_1C .

Найти координаты вершин параллелепипеда и расстояние от точки D_1 до прямой A_1C . (См. Задачу 2 на стр. 6 Задания).

6(6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 4, боковые рёбра равны 3. В боковых гранях ABS , BCS и CDS проведены соответственно биссектриса AK , медиана BM и высота CH . Найти объём треугольной пирамиды $SKMH$. (Используйте ответ на контрольный вопрос № 10).

7(6). Точки K и L лежат соответственно на рёбрах AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром a , $AK = \frac{1}{5}a$, $CL = \frac{2}{5}a$. Найти длину отрезка KL . (Используйте ответ на контрольный вопрос №9).

8(7). В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4, рёбра SA и SB равны, а $SC = 3$. Сфера касается сторон основания плоскости SAB и ребра SC . Найти радиус сферы.

9(7). В треугольной пирамиде $SABC$ угол между гранями ABC и ABS равен 45° , плоский угол ABC равен 30° , рёбра AB и SB перпендикулярны. Объём пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$, $SB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. Найти радиус описанной сферы.

10(7). В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 6 + \sqrt{2}$, $AD = 6 - \sqrt{2}$ и $AA_1 = 6$ расположены две сферы: первая касается граней $ABCD$, $ABB_1 A_1$, $ADD_1 A_1$; вторая сфера, радиус которой в 2 раза больше радиуса первой, касается первой сферы и касается граней $C_1 C B B_1$, $C_1 B_1 A_1 D_1$, $C_1 C D D_1$. Найти радиусы этих сфер.

11*(6). Около сферы радиуса $R = 6$ описан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В основании лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 5\sqrt{6}$. Ребро AA_1 образует равные острые углы с рёбрами AB и AD . Определить: а) косинус угла наклона ребра AA_1 к плоско-

сти основания и б) расстояние от вершины A до центра сферы O . (Используйте ответ на контрольный вопрос № 11).

12*(6). Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB . Известно, что $AB = 2, CD = \frac{1}{2}$. Найти угол между прямыми AC и BD , расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.