§2. Векторный метод решения задач стереометрии без использования прямоугольных координат

Напомним следующую теорему о векторах одной плоскости (теорема о разложении):

Пусть векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *не коллинеарны, тогда для любого вектора* $\vec{c}$, *лежащего в одной плоскости с векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *существует единственная пара чисел* x *и* y *таких, что* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

□ Приведём векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ к одному началу – точке O, через конец вектора $\vec{c}$ проведём прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

(рис. 10), тогда $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, т.е. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Если предположить, что возможно другое разложение $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, то должно выполняться равенство $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = 0$. Если $x - x_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$.

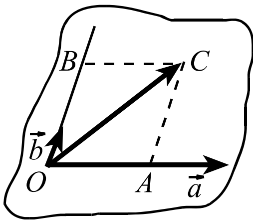

Рис. 10

Это означает коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что неверно, значит, $x - x_1 = 0$. По той же причине $y - y_1 = 0$. ■

Эта теорема верна и в том случае, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны одной плоскости (также приводим их к общему началу).

Из теоремы о разложении следует: пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой, тогда для того, чтобы точка D лежала в плоскости ABC, необходимо и достаточно, чтобы существовала пара чисел x и y такая, что $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 11).

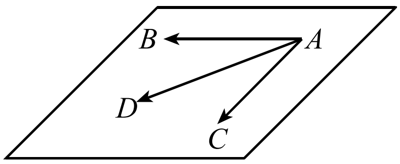

Рис. 11

Для применения векторного метода в пространстве нужны следующие две теоремы:

Теорема 1. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от одной точки и не лежат в одной плоскости, то равенство $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ верно только при $x = y = z = 0$.

□ Например, если $z \neq 0$, то $\vec{c} = -\dfrac{x}{z}\vec{a} - \dfrac{y}{z}\vec{b}$, что означает, что вектор $\vec{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Но это не так. Поэтому $z = 0$. По той же причине $x = 0$ и $y = 0$.

Теорема 2 (о разложении). *Пусть три вектора* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *не лежат в одной плоскости. Тогда для любого вектора* $\vec{d}$ *существует единственная тройка чисел* x, y, z *таких, что* $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

□ Отложим все четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, c$ и $\vec{d}$ от общей точки M (рис. 12). Векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ не лежат в одной плоскости, поэтому плоскости MAB, MAC, MBC различны. Если точка D попала на одну из них, например, на плоскость MAB, то $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е.

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c}.$$

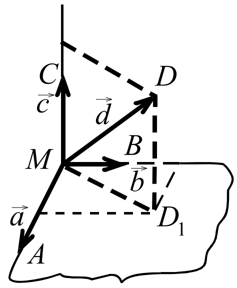

Рис. 12

Если же точка D не принадлежит ни одной из этих плоскостей, то проведём через точку D прямую, параллельную вектору $\overrightarrow{MC}$. Пусть D_1 – точка её пересечения с плоскостью MAB. По правилу сложения векторов $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD_1} + \overrightarrow{D_1D}$, по теореме о разложении на плоскости $\overrightarrow{MD_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$; из коллинеарности векторов $\overrightarrow{D_1D}$ и $\vec{c}$ следует $\overrightarrow{D_1D} = z\vec{c}$, поэтому

$$\vec{d} = \overrightarrow{MD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Предположение, что есть другое разложение $\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, приведёт к равенству

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0.$$

По предыдущей теореме это равенство возможно только лишь при $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Разложение единственно. ■

Задача 7. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма с основанием ABC. Доказать, что на прямых AB_1 и BC_1 есть такие точки M и N, что прямая MN параллельна прямой A_1C. Найти отношение $MN : A_1C$.

На рисунке призма похожа на прямую призму, но все наши действия не учитывают угол между боковым ребром и плоскостью основания.

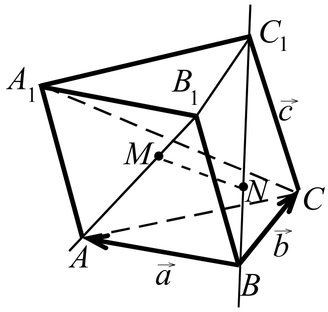

Рис. 13

Δ Пусть M – точка на AB_1, N – точка на BC_1 (рис. 13). Прямые MN и A_1C параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ коллинеарны, т.е. $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$. Разложим эти векторы по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$, не лежащим в одной плоскости. Имеем:

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec{c} - \vec{a},\ \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB_1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = x(\vec{c} - \vec{a});$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c},\ \overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{BC_1} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = y(\vec{b} + \vec{c});$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = -x(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{a} + y(\vec{b} + \vec{c}) = (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c};$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = -\vec{c} + (\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

Предположим, что точки M и N таковы, что $MN \parallel A_1C$, т.е. $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$, тогда имеет место равенство

$$(x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (y-x)\vec{c} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} - \lambda\vec{c}.$$

В силу единственности разложения вектора по трём векторам, не лежащим в одной плоскости, следует равенство коэффициентов разложения

$$x - 1 = -\lambda,\ y = \lambda,\ y - x = -\lambda.$$

Эта система имеет единственное решение $\lambda = \frac{1}{3},\ x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}$, значит прямая MN будет параллельна прямой A_1C только в том случае, когда $AM = \frac{2}{3}AB_1$ и $BN = \frac{1}{3}BC_1$. Из $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$ следует $\left|\overrightarrow{MN}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{A_1C}\right|$, т.е. $MN = \frac{1}{3}A_1C$, откуда $MN : A_1C = 1 : 3$. ▲

Задача 8. В условиях предыдущей задачи найти длину отрезка MN, если в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, $AB = BC = 2$, $\angle B = 90^\circ$, а ребро $BB_1 = 1$ и образует равные углы по 60° с рёбрами AB и BC.

Δ Данные задачи определяют длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и углы между ними, это позволяет вычислить скалярные произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ и $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Имеем:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| = 1,$$

1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$

2) углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны 60°, поэтому

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos 60^\circ=1 \text{ и } \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 60^\circ=1.$$

Из решения задачи 7 известно разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{MN}=-\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}-\lambda\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}.$$

Так как $\left|\overrightarrow{MN}\right|^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{9}\left(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)=$

$$=\frac{1}{9}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=$$

$=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=1$, то $MN=\sqrt{\left|\overrightarrow{MN}\right|^2}=1$. ▲

Замечание. Если в условиях задач 7 – 8 требовалось бы найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1, то, расположив точки K и P на AB_1 и BC_1, надо разложить вектор $\overrightarrow{KP}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а затем использовать условия $KP\perp AB_1$ и $KP\perp BC_1$, которые равносильны условиям $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$ и $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$.

Задача 9. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC$ и $AD = DC$. Доказать, что рёбра AC и BD перпендикулярны.

Δ Выберем тройку векторов, не лежащих в одной плоскости:

$$\vec{a}=\overrightarrow{BA},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{BD}.$$

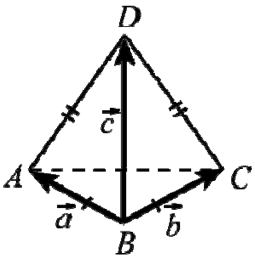

Рис. 14

Разложим векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ è $\overrightarrow{A\tilde{N}}$ по этим векторам:

$$\overrightarrow{AD}=\vec{n}-\vec{a};\ \overrightarrow{CD}=\vec{c}-\vec{b};$$

Известно, что $AB = BC$, т.е. $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$, и $AD = DC$, т.е. $|\vec{c}-\vec{a}|=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$. Требуется доказать, что $AC\perp BD$, т.е. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

Это означает, что надо установить, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Из $|\vec{c}-\vec{a}|=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$ следует $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2=\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2$,

$$\vec{c}^2-2\vec{a}\vec{c}+\vec{a}^2=\vec{c}^2-2\vec{b}\vec{c}+\vec{b}^2.$$

Учитывая, что $\vec{a}^2=\vec{b}^2$ получаем $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$, т.е. $\vec{c}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$. Поскольку $\vec{c}=\overrightarrow{BD}$ и $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, т.е. $BD\perp AC$. ▲

Следствие. В правильной треугольной пирамиде, в частности, у правильного тетраэдра, противоположные рёбра перпендикулярны.

Задача 10. Точки M и N – середины рёбер тетраэдра $ABCD$ (рис. 15), точка P взята на ребре AD так, что $AP : AD = 2 : 3$. Найти, в каком отношении плоскость MNP делит ребро BC.

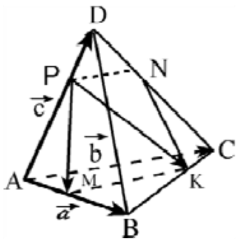

Рис. 15

Δ Пусть плоскость MNP пересекает ребро BC в точке K. Точка K лежит в плоскости MNP тогда и только тогда, когда существуют числа x и y такие, что

$$\overrightarrow{PK}=x\overrightarrow{PM}+y\overrightarrow{PN}. \qquad (5)$$

Выберем тройку векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$, разложим векторы $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PN}$ по этим векторам $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{c}$, тогда $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}$,

$$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\vec{c},\ \overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{c}\right),$$

поэтому $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}$.

Далее $\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}=-\frac{2}{3}\vec{c}$,

а стоящий в этой сумме вектор $\overrightarrow{BK}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BC}$, т.е. $\overrightarrow{BK}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$.

Находим $\overrightarrow{PK}=-\frac{2}{3}\vec{c}+\vec{a}+\lambda\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\left(1-\lambda\right)\vec{a}+\lambda\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$.

Подставляя полученные выражения в (5), получим

$$\overrightarrow{PK}=\left(1-\lambda\right)\vec{a}+\lambda\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}=x\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}\right)=$$

$$=\frac{x}{2}\vec{a}+\frac{y}{2}\vec{b}-\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y\right)\vec{c}.$$

В силу единственности разложения вектора коэффициенты разложения равны, т.е. $1-\lambda=\frac{x}{2},\ \lambda=\frac{y}{2},\ \frac{2}{3}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y.$

Эта система имеет единственное решение $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3},\ \lambda=\frac{2}{3}.$ Значит, $\overrightarrow{BK}=\lambda\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},$ точка K лежит на ребре BC и делит его в отношении $BK : KC = 2 : 1$. ▲