§1. Векторы в пространстве. Координатный метод решения задач стереометрии

Вектором называется направленный отрезок, и буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия: абсолютная величина (длина) вектора, равенство векторов, угол между векторами.

Напомним некоторые отличия, связанные с трёхмерностью пространства, и важные для приложений понятия и утверждения.

1°. В трёхмерном пространстве вектор имеет три координаты: если в прямоугольной декартовой системе координат точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$ – его начало, а точка $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – его конец, то координатами вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ называют числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Записывается

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

2°. Арифметические действия – сумма векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и произведение вектора $\vec{a}$ на число λ определяются аналогично двумерному случаю:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$\lambda\vec{a} = \vec{d}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

и сохраняются все свойства этих операций.

3°. Длина вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4°. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой.

Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

5°. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ определяется равенством $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между этими векторами:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$$

(здесь $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).
Отсюда следует, что длина отрезка AB находится по известному вектору $\overrightarrow{AB}$ по формуле $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}.$

6°. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

I. Угол между прямыми

Углом между прямыми a и b называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными двум данным. Угол между прямыми измеряется <u>от 0 до 90°</u>. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, лежащие на прямых a и b, и φ – угол между этими прямыми, то

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|.$$

Задача 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=1$, $AD=2$, $AA_1=2$. Точка M – середина диагонали AD_1 грани AA_1D_1D, точка N – середина ребра B_1C_1. Найти угол, который образует диагональ параллелепипеда B_1D с а) прямой AD_1, б) прямой MN.

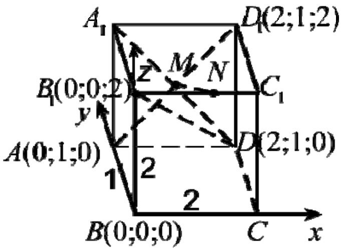


Рис. 1

ΔВведём прямоугольную систему координат с началом координат в точке B, как показано на рис. 1. Определяем координаты точек B_1, D, A, D_1, M и N и находим координаты векторов $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$:

$$B_1(0;0;2),\ D(2;1;0)\Rightarrow\overrightarrow{B_1D}=(2;1;-2);$$

$$A(0;1;0),\ D_1(2;1;2)\Rightarrow\overrightarrow{AD_1}=(2;0;2);$$

$$M(1;1;1),\ N(1;0;2)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(0;-1;1).$$

Так как $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$, то $B_1D\perp AD_1$, угол между прямыми B_1D и AD_1

равен 90°.

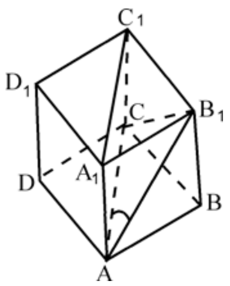
Если φ – угол между прямыми MN и B_1D, то

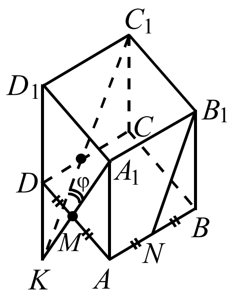
$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1D}\right|}\right| = \left|\frac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

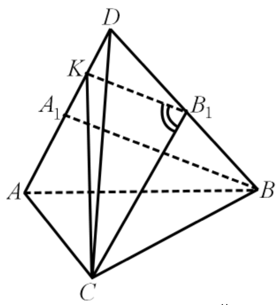
значит прямые MN и BD_1 образуют угол 45°. ▲

Замечание 1. При координатном методе решения удобно делать большой рисунок и координаты соответствующих точек выписывать на этом рисунке. Как правило, ошибок бывает меньше.

Замечание 2. В ряде задач угол между прямыми в пространстве всё же удобнее находить как равный ему (или смежный) угол треугольника, который образуется при параллельном переносе одной прямой до пересечения с другой. Вот два примера с кубом (ребро куба равно a) и один с тетраэдром. (Заметим, что тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида).







а) Угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 равен углу CAB_1 (т.к. $AC\|A_1C_1$) и равен 60° (ΔAB_1C – правильный).

б) Угол между прямыми A_1M и B_1N (M и N середины рёбер) равен углу C_1KA_1 $\left(C_1K\|B_1N\right)$: $D_1K = 2a,$ $C_1K = A_1K = a\sqrt{5},$ $A_1C_1 = a\sqrt{2},$ по теореме косинусов $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}.$

в) В тетраэдре $DABC$ точки A_1 è B_1 – середины рёбер AD è BD. Чтобы найти угол φ между скрещивающимися прямыми CB_1 è BA_1

проводят $B_1K \| BA_1$, тогда $\cos\varphi = \left|\cos\left(\angle KB_1C\right)\right|$. Косинус угла находят по теореме косинусов из треугольника KB_1C.

II. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Задача 2. В условиях задачи 1 найти расстояние от точки M до прямой B_1D.

Δ Предположим, что точка K лежит на прямой B_1D и $MK \perp B_1D$. Требуется найти длину отрезка MK. Пусть $(x;y;z)$ – координаты точки K. Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{B_1D}$, т.е. $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$.

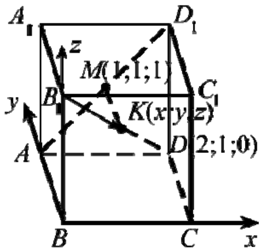


Рис. 2

Имеем: $B_1(0;0;2)$, $D(2;1;0)$, $\overrightarrow{B_1K}(x;y;z-2)$ и $\overrightarrow{B_1D}(2;1;-2)$. Из равенства, $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$, т.е. $(x;y;z-2) = \lambda(2;1;-2)$ следует $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z-2 = -2\lambda$. Вектор $\overrightarrow{MK}(x-1;y-1;z-1)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{B_1D}(2;1;-2)$, их склярное произведение равно нулю, поэтому

$$2(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0.$$

Подставляем сюда $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2-2\lambda$, находим $\lambda = \frac{5}{9}$, тогда $K\left(\frac{10}{9};\frac{5}{9};\frac{8}{9}\right)$ и координаты вектора $\overrightarrow{MK}$ таковы: $x-1 = 2\lambda-1 = \frac{1}{9}$, $y-1 = \lambda-1 = -\frac{4}{9}$, $z-1 = (2-2\lambda)-1 = 1-2\lambda = -\frac{1}{9}$, $\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{9};-\frac{4}{9};-\frac{1}{9}\right)$. Определим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, (т.е. расстояние от точки M до прямой B_1D): $\left|\overrightarrow{MK}\right| = MK = \sqrt{\frac{16+1+1}{81}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Заметим, что также определено и положение точки K, известны её координаты и, например, можно найти $B_1K : B_1D = \frac{5}{9}$. ▲

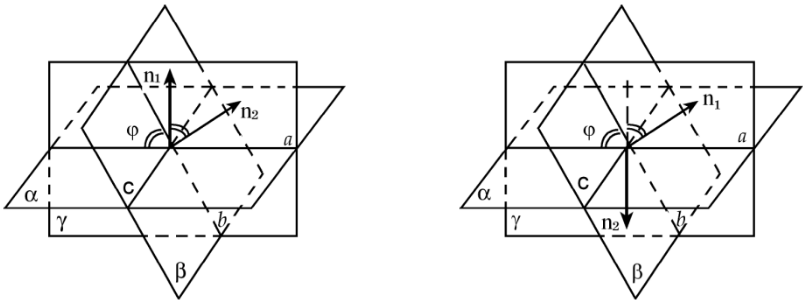
III. Уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью

В прямоугольной системе координат плоскость задаётся уравнением $ax + by + cz + d = 0$, причём вектор $\vec{n}(a;b;c)$ перпендикулярен этой плоскости (*его называют нормалью к плоскости*).

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a;b;c)$ в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ (здесь $M(x;y;z)$ – произвольная точка этой плоскости), а в координатной форме

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями



а) б)

Рис. 3

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Плоскость γ перпендикулярна прямой c и пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Угол между прямыми a и b называется углом между плоскостями α и β. Как и угол между прямыми, он лежит в диапазоне от 0 до $90°$. Угол между плоскостями либо равен углу между векторами, перпендикулярными плоскостям (рис. 3а), либо дополняет его до $180°$. В обоих случаях $\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}_1 \widehat{,}\ \vec{n}_2\right)\right|$. Итак, векторы $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ соответственно перпендикулярны плоскостям

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

угол между этими плоскостями определяется из равенства

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right| = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right|. \qquad (1)$$

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка M – середина ребра AB, точка K – середина ребра DD_1. Найти угол между плоскостями AKB_1 и KMC.

Δ Введём прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку A, как показано на рис. 4.

Составим уравнение плоскости AKB_1. Пусть оно имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (2)$$

Точка $A(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости, следовательно $d = 0$.

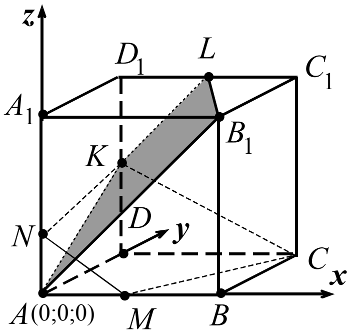


Рис. 4

Подставим координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$ и $B_1(1;0;1)$ в уравнение (2) при $d = 0$, получим $b + \frac{c}{2} = 0$ и $a + c = 0$.

Таким образом $b = -\frac{c}{2}$, $a = -c$ и уравнение (2) принимает вид $-cx - \frac{c}{2}y + cz = 0$.

Сокращая на c и умножая на (–2), приведём уравнение к виду $2x + y - 2z = 0$.

Составим уравнение плоскости KMC. Пусть оно имеет вид

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \qquad (3)$$

Подставляем координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ и $C(1;1;0)$, получаем систему: $b_1 + \frac{c_1}{2} + d_1 = 0$, $\frac{a_1}{2} + d_1 = 0$, $a_1 + b_1 + d_1 = 0$.

Вычтя из третьего уравнение второе, будем иметь $\frac{a_1}{2} + b_1 = 0$, т.е. $b_1 = -\frac{a_1}{2}$. Из второго уравнения следует $d_1 = -\frac{a_1}{2}$, тогда из первого уравнения получим $c_1 = 2a_1$. Уравнение (3) принимает вид $a_1x - \frac{a_1}{2}y + 2a_1z - \frac{a_1}{2} = 0$ или $2x - y + 4z = 1$.

Итак, $\vec{n}_1(2;1;-2)$, $|\vec{n}_1| = 3$, $\vec{n}_2(2;-1;4)$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{21}$ и угол между плоскостями AKB_1 и KMC находим из равенства

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right| = \left|\frac{-5}{3\sqrt{21}}\right|, \quad \varphi = \arccos\frac{5}{3\sqrt{21}}.$$

Заметим, что для определения угла между плоскостями координатным способом построение сечений не предусматривается. На рис. 4 сечения изображены для полноты картины. ▲

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой, наклонённой к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и её перпендикулярной проекцией на эту плоскость, он заключён в пределах от 0 до $90°$. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен $90°$, если прямая и плоскость параллельны, угол между ними равен 0.

Пусть прямая a образует с плоскостью α угол φ (рис. 5), $\vec{a}$ – ненулевой вектор, лежащий на прямой a и пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ равен ψ. Либо $\varphi + \psi = 90^\circ$ (когда $0 \le \psi \le 90^\circ$), либо $\psi - \varphi = 90^\circ$ (когда $90^\circ < \psi \le 180^\circ$), но в обоих случаях $\sin\varphi = |\cos\psi|$, т.е.

$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right|.$$

Рис. 5

Итак, если вектор $\vec{n}(a;b;c)$ перпендикулярен плоскости α, то угол φ между этой плоскостью и прямой a, проходящей через точки A и B, определяется из равенства

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|. \qquad (4)$$

Задача 4. В условиях задачи 3 найти угол между прямой KM и плоскостью AKB_1.

Δ Плоскость AKB_1 в рассматриваемой системе координат имеет уравнение $2x+y-2z=0$, вектор $\vec{n}(2;1;-2)$, $|\vec{n}|=3$. На прямой KM рассмотрим вектор $\overrightarrow{KM}: K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left|\overrightarrow{KM}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Угол φ между прямой KM и плоскостью AKB_1 находим по формуле $\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{KM}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{KM}\right|}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. ▲

IV. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α параллельна плоскости β, прямая b лежит в плоскости β, точка B лежит на прямой b (рис. 6). Очевидно, что расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию от прямой b до плоскости α и равно расстоянию между плоскостями α и β.

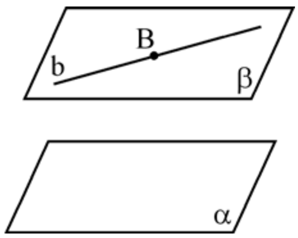


Рис. 6

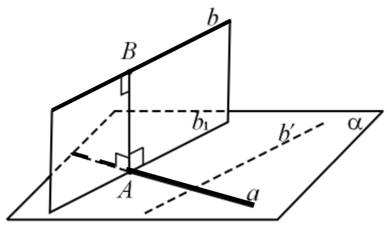


Рис. 7

Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b. Проведём через прямую a плоскость α, параллельную прямой b (рис. 7). Через прямую b проведём плоскость, перпендикулярную плоскости α, пусть линия пересечения этих плоскостей b_1 (эта прямая есть проекция прямой b на плоскость α). Точку пересечения прямых a и b_1 обозначим A. Точка A является проекцией некоторой точки B прямой b. Из того, что $AB\perp\alpha$ следует, что $AB\perp a$ и $AB\perp b_1$; кроме того, $b\| b_1$, значит $AB\perp b$. Прямая AB пересекает скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярна и той, и другой.

Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых a и b.

Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми и равна расстоянию от любой точки прямой b до плоскости α. Задача нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми не требует построения их общего перпендикуляра и совпадает с задачей определения расстояния от точки до плоскости.

Задача 5. Найти расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Δ

Пусть прямая, проходящая через точку M перпендикулярно плоскости α, пересекает её в точке K с координатами $(x;y;z)$. Вектор $\overrightarrow{MK}$ перпендикулярен плоскости α, как и вектор $\vec{n}(A;B;C)$, т.е. векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\vec{n}$ – коллинеарны, $\overrightarrow{MK}=\lambda\vec{n}$.

Так как $\overrightarrow{MK}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и $\vec{n}(A;B;C)$, то $x-x_0=\lambda A$, $y-y_0=\lambda B$, $z-z_0=\lambda C$.

Точка K лежит в плоскости α, её координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

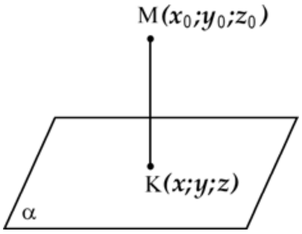


Рис. 8

Подставляем $x=x_0+\lambda A$, $y=y_0+\lambda B$, $z=z_0+\lambda C$ в уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, получаем

$$A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C(z_0+\lambda C)+D=0,$$

откуда $\lambda=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$.

Находим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, которая и равна расстоянию от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\lambda\vec{n}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Итак, расстояние h от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ таково

$$h = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (5)$$

Например, расстояние h от точки M (2;–3;1) до плоскости

$$x - 2y + 2z - 1 = 0$$

равно

$$h = \frac{\left|2 - 2(-3) + 2 \cdot 1 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3. \ \blacktriangle$$

Задача 6. Ребро куба равно a. Найти расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.

Δ Рассмотрим, например, прямые, на которых лежат диагонали AC и DC_1 граней куба (рис. 9).

Диагональ AB_1 грани AA_1B_1B параллельна прямой DC_1, поэтому прямая DC_1 параллельна плоскости AB_1C. Расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC равно расстоянию от прямой DC_1 до плоскости AB_1C и равно расстоянию от любой точки прямой DC_1 до плоскости AB_1C.

Введём прямоугольную систему координат с началом координат в точке A так, как показано на рис. 9 и вычислим координаты отмеченных точек.

Пусть уравнение плоскости AB_1C (будем также обозначать её α) $kx + by + cz + d = 0$ (не используем букву a, поскольку она обозначает ребро куба).

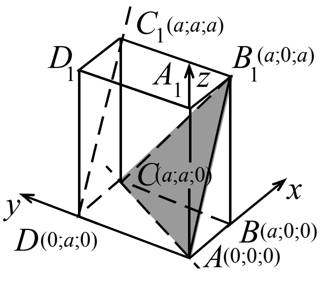


Рис. 9

$$A(0;0;0) \in \alpha \Rightarrow d = 0;$$
$$C(a;a;0) \in \alpha \Rightarrow ka + ba = 0 \Rightarrow b = -k;$$
$$B_1(a;0;a) \in \alpha \Rightarrow ka + ca = 0 \Rightarrow c = -k.$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнение плоскости: $kx - ky - kz = 0$, сокращая на k, получаем $x - y - z = 0$. Найдём расстояние h от точки $D(0;a;0)$ прямой DC_1 до этой плоскости по формуле (5):

$$h = \frac{|0 - a + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC.

Приведём другое решение этой задачи, другой метод определения расстояния от точки (прямой) до плоскости, не используя координаты, но простой и часто применяемый. Он основан на вычислении объёма треугольной пирамиды двумя способами. Рассмотрим треугольную пирамиду AB_1CD (рис. 9). Искомое расстояние от точки D до плоскости AB_1C равно высоте h этой пирамиды, опущенной из вершины D, поэтому для пирамиды AB_1CD её объём $V = \frac{1}{3} S_{AB_1C} h.$

Треугольник AB_1C правильный со стороной $a\sqrt{2}$, его площадь равна $\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$. Итак, $V = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h.$

Объём V этой же пирамиды легко вычисляется, если в качестве основания рассмотреть грань ACD, так как $S_{ACD} = \frac{1}{2} a^2$, а высота пирамиды, опущенная из вершины B_1 на плоскость ACD, очевидно, равна $BB_1 = a$. Находим $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 a = \frac{a^3}{6}$.

Из равенства $\frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h = \frac{a^3}{6}$ определяем $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$. ▲