Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Планиметрия (часть II)

Задание №4 для 9-х классов

(2009-2010 учебный год)

г. Долгопрудный, 2009

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 9-х классов (2009-2010 учебный год). - М.: МФТИ, 2009, 24с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 10 января 2010 г.

Учащийся должен стараться выполнять **все** задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 18.11.09
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 1500. Заказ №10-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Вторая часть по планиметрии содержит три параграфа. В § 1 подробно обсуждаются свойства касательных, хорд и секущих, доказывается теорема “о касательной и секущей”. § 2 посвящён вписанным и описанным четырёхугольникам, теме, которая практически не рассматривается в учебнике. В § 3 рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Этой теме, к сожалению, в школе также мало уделяется внимания, хотя именно в задачах на построение лучше всего усваивается и закрепляется теоретический материал.

В решениях задач § 2 будут применяться теоремы косинусов и синусов, более подробно эти теоремы будут обсуждаться в задании “Планиметрия”, часть III в 10 классе ФЗТШ. Здесь мы только напомним эти теоремы. Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены a, b, c, а величины противолежащих углов α, β, γ, справедливы две теоремы, утверждения которых можно кратко записать так:

теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Напомним также, что в учебнике доказано, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN, точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\Delta AOM = \Delta AON$. Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO$. Таким образом, если из

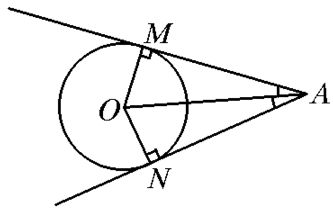


Рис. 1

точки к окружности проведены две касательные, то:

1°. **отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;**

2°. **прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.**

Используя свойство 1, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность.)

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D, при этом $DA = a$, $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN.

▷ Пусть $a > b$. Обозначим $x = MN$,

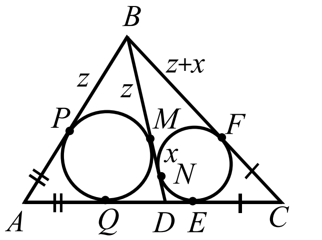


Рис. 2

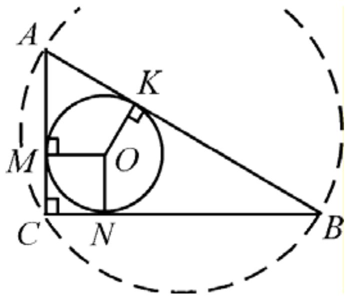


Рис. 3

$y = ND,\ z = BM$. По свойству касательных $DE = y$, $QD = x + y$, $AQ = AP = a - (x + y)$, $CE = CF = b - y$, $BP = z$ и $BF = z + x$. Выразим боковые стороны: $AB = z + a - x - y$, $BC = z + x + b - y$. По условию $AB = BC$, поэтому $z + a - x - y = z + x + b - y$. Отсюда находим $x = (a - b)/2$. Итак, $MN = (a - b)/2$. Если $a < b$, то $MN = (b - a)/2$. Итак, $MN = \dfrac{1}{2}|a - b|$. ◁

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т.е. $a + b = 2R + 2r$.

▷ Пусть M, N и K – точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC = b$, $BC = a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Вспомним, что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R$. Далее,

$OM \perp AC$, $BC \perp AC$, значит, $OM \| BC$, аналогично $ON \perp BC$, $AC \perp BC$, значит, $ON \| AC$. Четырёхугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r, поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r$.

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN$, поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т.к. $AB = 2R$, то получаем $a + b = 2R + 2r$. ◁

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами.

▷ Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 4). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α. Соединим точки A и B с центром окружности. Так как $OA \perp AN$, $OA = OB$, то $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \alpha$. Сумма углов треугольника равна $180°$, поэтому $\angle AOB = 2\alpha$.

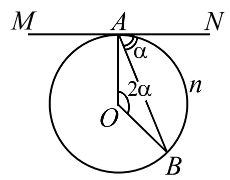


Рис. 4

Таким образом, градусная мера угла BAN между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB, которая заключена между его сторонами. (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAB.) ◁

Задача 3. Точка C лежит на окружности и отстоит от касательных, проведённых из точки M к окружности, на расстоянии $CS = a$ и $CP = b$ (рис. 5). Доказать, что $CK = \sqrt{ab}$. (Это утверждение называется лемма Адамара).

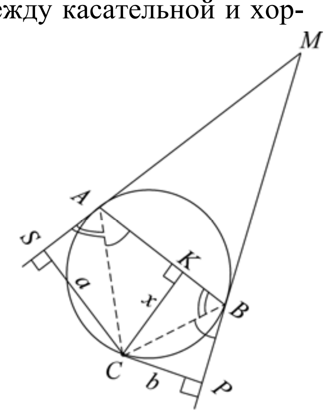


Рис. 5

▷ Проведём хорды CA и CB. Угол SAC между касательной SA хордой AC равен вписанному углу ABC. А угол PBC между касательной PB и хордой BC равен вписанному углу BAC.

Получили две пары подобных прямоугольных треугольников $\Delta ASC \sim \Delta BKC$ и $\Delta BPC \sim \Delta AKC$. Из подобия имеем $\dfrac{a}{AC} = \dfrac{x}{BC}$ и $\dfrac{b}{BC} = \dfrac{x}{AC}$, откуда следует $ab = x^2$, $x = \sqrt{ab}$. (Ч.т.д.) $\triangleleft$

Докажем теорему, обычно называемую “теоремой о касательной и секущей”.

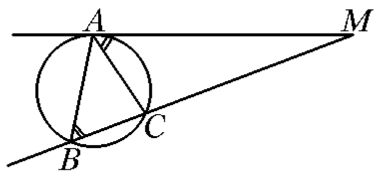


Рис. 6

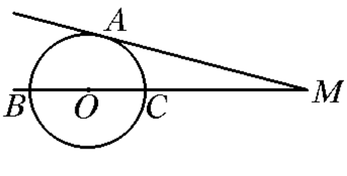


Рис. 7

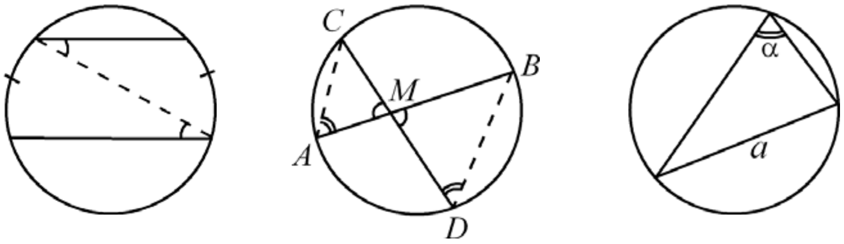
Теорема 2. Пусть из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB, пересекающая окружность в точке C (рис. 6). Тогда справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т.е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек её пересечения с окружностью.

$\triangleright$ Проведём хорду AC. Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC, оба измеряются половиной градусной меры дуги AC. В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA, а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA / MB = MC / MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. $\triangleleft$

Задача 4. Радиус окружности равен r. Из точки M проведены касательная MA и секущая MB, проходящая через центр окружности (рис. 7). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

$\triangleright$ Обозначим искомое расстояние x: $x = MO$, тогда $MB = x + r$, $MC = x - r$ и по условию $MA = MB / 2 = (x + r) / 2$. По теореме о касательной и секущей $(x + r)^2 / 4 = (x + r)(x - r)$, откуда, сокращая на

$(x+r)$, получаем $(x+r)/4=(x-r)$. Легко находим $x=5r/3$. ◁



а) **б)** **в)**

Рис. 8

Напомним также следующие свойства хорд окружности:

1°. **Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Обратно: диаметр, проходящей через середину хорды (не являющуюся диаметром) перпендикулярен ей.**

2°. **Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратно: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.**

3°. **Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны (см. рис. 8а).**

4°. **Если две хорды** AB **и** CD **пересекаются в точке** M, **то** $AM\cdot MB=CM\cdot MD$, **т.е. произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды (см. рис. 8б).**

5°. **В окружности радиуса** R **длина хорды** a **и величина** α **вписанного угла, опирающегося на эту хорду, связаны соотношением** $a=2R\cdot\sin\alpha$.

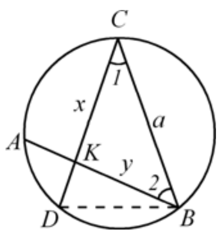


Рис. 9

Задача 5. В окружности проведены три равные хорды $AB=BC==CD=a$. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, угол $BKC=120°$ (рис. 9). Найти радиус окружности.

▷ Обозначим $CK=x$, $BK=y$, тогда $AK=a-y$, $DK=a-x$. По свойству 4^0 имеем: $CK\cdot DK=AK\cdot BK$, т.е. $x(a-x)=y(a-y)$. Это равенство преобразуем к виду $(x-y)(a-x-y)=0$. Так как $a\neq x+y$ (в этом случае треугольник BKC не существует), то $x=y$. Следовательно, треугольник $BKC-$

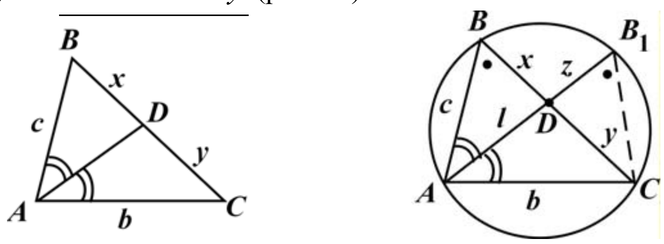
равнобедренный и $\angle 1 = \angle 2 = 30°$. Из теоремы синусов следует, что $R = BD / 2\sin(\angle 1)$. BD найдём из ΔBCD по

теореме косинусов: $BD = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 30°} = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Таким образом, $R = BD / 2\sin 30^{\circ} = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. ◁

Используем свойство пересекающихся хорд для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $AD-$ биссектриса треугольника $ABC,$ тогда $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD,$ т.е. если $AB = c,$ $AC = b,$ $BD = x,$ $DC = x,$ то $AD^2 = bc - xy$ (рис. 9а).



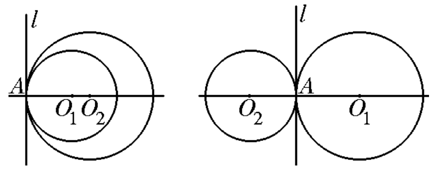
а) б)

Рис. 10

□ Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 10б) и точку пересечения продолжения биссектрисы AD с окружностью обозначим B_1. Обозначим $AD = l$ и $DB_1 = z.$ Вписанные углы ABC и AB_1C равны, $AD-$ биссектриса угла $A,$ поэтому $\triangle ABD \backsim \triangle AB_1C$ (по двум углам). Из подобия имеем $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AB_1},$ т.е. $\dfrac{l}{b} = \dfrac{c}{l+z},$ откуда $l^2 = bc - lz.$ По свойству пересекающихся хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DB_1,$ т.е. $xy = lz,$ поэтому получаем $l^2 = bc - xy.$ ■

Напомним, что в задании 1 доказано свойство биссектрисы треугольника: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC},$ т.е. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}.$

В заключении параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются касающимися внутренне (рис. 10а), а если расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 11б).



а) Рис. 11 б)

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l$, $AO_2 \perp l$ следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров.*

Задача 6. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 12). Найти AB, если $BC = a$.

▷ Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB$, то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т.к. радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2$.

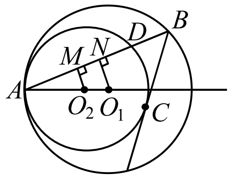


Рис. 12

По теореме о касательной и секущей имеем:
$$BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2\left(1 - \frac{AD}{AB}\right), \text{ т.е.}$$

$$a^2 = AB^2\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right).$$

Итак, $AB = a\sqrt{\dfrac{R_1}{R_1 - R_2}}$. ◁

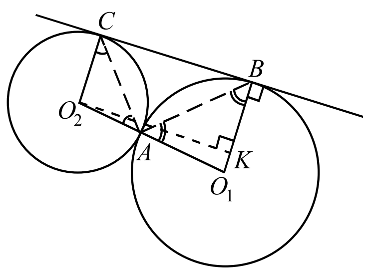


Рис. 13

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 13). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

▷ Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C. По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \| O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180°$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle CO_2A$, то $\angle ABC + \angle ACB = 90°$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 90°$, и поэтому радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, равен половине гипотенузы BC.
Найдём BC. Пусть $O_2K \perp O_1B$, тогда $KO_2 = BC$, $O_1K = R_1 - R_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. ◁

§ 2. Вписанные и описанные четырёхугольники

Четырёхугольник называется *вписанным* в окружность, если окружность проходит через все его вершины.

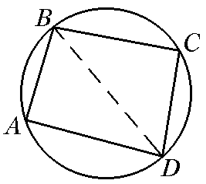


Рис. 14

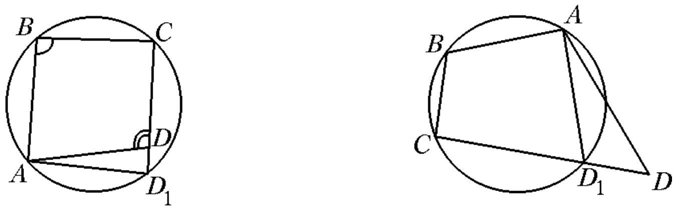
Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 14). Вписанные углы A и C опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогично, $\angle B + \angle D = 180°$.

Итак, если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма противолежащих углов равна $180°$.

Верно и обратное: если сумма противолежащих углов четырёхугольника равна $180°$, то около этого четырёхугольника можно описать окружность. Докажем это.

▷ Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$. Проведём через вершины A, B и C окружность. Требуется показать, что четвёртая вершина D не может лежать ни внутри, ни вне этой окружности.

Допустим, что точка D лежит внутри окружности (рис. 15а). Продолжим сторону CD до пересечения с окружностью, получим точку D_1. Четырёхугольник $ABCD_1$ вписан в окружность, следовательно, $\angle B + \angle D_1 = 180°$. По условию $\angle B + \angle D = 180°$, поэтому $\angle D = \angle D_1$.



а) б)

Рис. 15

Но $\angle D$ – внешний угол для треугольника ADD_1, внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного. Значит, предположение неверно, точка D не может лежать внутри окружности. Совершенно аналогично доказывается, что точка D не может лежать и вне окружности (рис. 15б). Следовательно, точка D должна лежать на окружности. ◁

1. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм есть прямоугольник.

Действительно, если $ABCD$ – параллелограмм, то его противолежащие углы равны: $\angle A = \angle C$. Если этот параллелограмм вписан в окружность, то $\angle A + \angle C = 180°$, значит, $\angle A = \angle C = 90°$. Аналогично $\angle B = \angle D = 90°$, $ABCD$ – прямоугольник. Обратное утверждение очевидно.

2. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Это следует из того, что сумма углов трапеции (рис. 16), прилежащих к боковой стороне, равна $180°$ (как сумма внутренних односторонних при параллельных прямых): $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Около нее можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна $180°$: $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Отсюда следует, что равны вписанные углы, опирающиеся на боковые стороны, и, следовательно, равны и сами стороны.

Задача 8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 3 (рис. 17). Сторона AD является диаметром окружности, $CD = 4$. Стороны AB и BC равны. Найти эти стороны.

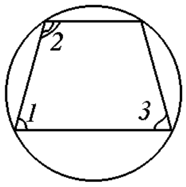


Рис. 16

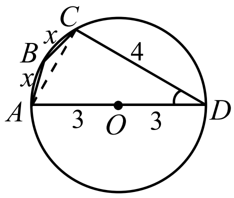


Рис. 17

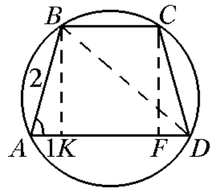


Рис. 18

▷ Неизвестные стороны обозначим x, угол ADC обозначим φ. Четырёхугольник вписан в окружность, значит, $\angle B = 180° - \varphi$. Проведём диагональ AC. Угол ACD опирается на диаметр, он прямой. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\cos\varphi = 2/3$, $AC = AD\sin\varphi = AD\sqrt{1-\cos^2\varphi} = 2\sqrt{5}.$ Из треугольника ABC по теореме косинусов будем иметь

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos(180° - \varphi),$$

откуда, учитывая, что $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi$, получим $20 = 2x^2 + 2x^2\cos\varphi$. Подставляем сюда значение $\cos\varphi = 2/3$ и находим $x = \sqrt{6}$. ◁

Задача 9. Основания равнобокой трапеции равны 1 и 3, боковые стороны равны 2 (рис. 18). Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

▷ Трапеция равнобокая. Если $BK \perp AD$ и $CF \perp AD$, то по свойству трапеции $AK = FD = (AD - BC)/2 = 1$. В прямоугольном треугольнике ABK гипотенуза AB в два раза больше катета AK, следовательно, $\angle ABK = 30°$ и $\angle BAK = 60°$. Около равнобокой трапеции можно описать окружность. <u>Эта окружность описана и около треугольника ABD</u>. Радиус R этой окружности выражается через угол и противолежащую сторону по формуле <u>$R = a/2\sin A$</u>. Найдём

$a = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60°} = \sqrt{7}.$ Следовательно, $R = a / 2\sin A = \sqrt{7/3}.$ ◁

Четырёхугольник называется *описанным* около окружности, если окружность касается всех его сторон.

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 19). Точки касания окружностью сторон четырёхугольника обозначим M, N, P, Q. По свойству касательных: $AM = AN$, $BP = NB$, $MD = QD$, $PC = CQ$. Складывая эти равенства, получим: $AM + MD + BP + PC = AN + NB + CQ + QD$, что означает $AD + BC = AB + CD$. Итак, **если четырёхугольник описан около окружности, то суммы противолежащих сторон равны.**

Докажем, что справедливо и такое утверждение: **если в выпуклом четырёхугольнике суммы длин противолежащих сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.**

▷ Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AD + BC = AB + CD$. Если докажем, что существует единственная точка, равноудалённая от всех сторон четырёхугольника, то эта точка, очевидно, будет центром окружности, касающейся всех сторон четырёхугольника. Положим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. По условию $a + c = b + d$, что равносильно $c - b = d - a$. Пусть $d > a$. Отложим на большей стороне CD меньшую сторону $DM = a$ (рис. 20). Так

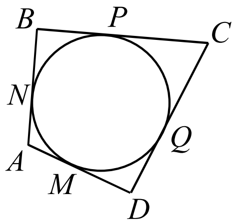


Рис. 19

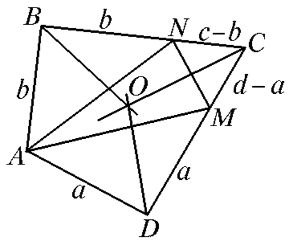


Рис. 20

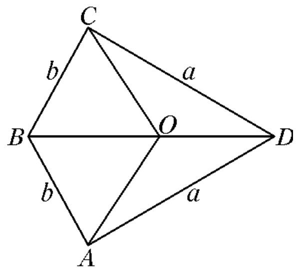


Рис. 21

как в этом случае $c > b$, то также отложим $BN = b$. Получим три равнобедренных треугольника ABN, ADM, MCN.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, отсюда следует, что если провести биссектрисы углов B, C, D трапеции, то они разделят пополам соответственно отрезки AN, AM, MN и будут им перпендикулярны. Это означает, что эти биссектрисы будут серединными перпендикулярами трёх сторон треугольника AMN, а они по теореме пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от сторон AB и BC (лежит на OB), CD и AD (лежит на OD) и BC и CD (лежит на OC), следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырёх сторон четырёхугольника $ABCD$.

Если $d = a$, то $c = b$ (рис. 21), биссектрисы углов B и D лежат на одной прямой (перпендикулярны AC и проходят через середину AC), и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD. Пусть биссектриса угла C пересекает BD в точке O, тогда (в силу симметрии) AO – биссектриса угла A, и, следовательно, точка O одинаково удалена от всех четырёх сторон, и в этот четырёхугольник можно вписать окружность ч.т.д. ◁

Задача 10. Равнобокая трапеция с основаниями a и b $(a > b)$ описана около окружности. Найти 1) радиус окружности и 2) косинус угла при большем основании.

▷ Пусть в равнобокой трапеции $ABCD$ $BC = b$, $AD = a$ (рис. 22). Эта трапеция равнобокая, $AB = CD$; она описана около окружности, следовательно, $AB + CD = AD + BC$. Отсюда получаем: $AB = CD = (a+b)/2$. Проведём BM и CN перпендикулярно AD. Трапеция равнобокая, углы при основании равны, следовательно, равны и треугольники ABM и DCN и $AM = ND$.

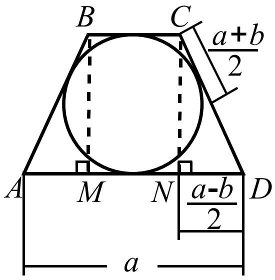


Рис. 22

По построению $MBCN-$ прямоугольник, $MN = BC = b$, поэтому $AM = (AD - BC)/2 = (a-b)/2$. Из прямоугольного треугольника ABM находим

$$\cos A = \frac{AM}{AB} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{и}$$

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}\ .$$

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности, поэтому радиус окружности равен $\sqrt{ab}/2$. ◁

§ 3. Задачи на построение

Задачи на построение рассматривались в задании № 2 для 8 класса. Однако некоторые учащиеся поступили в ФЗФТШ только в этом году, поэтому уделим этой теме внимание ещё раз, остановимся также на методе геометрических мест, методе подобия и методе симметрии.

В задачах на построение требуется построить некоторую геометрическую фигуру, используя только линейку и циркуль. С помощью линейки можно проводить прямую (но нельзя с её помощью откладывать отрезки или, пользуясь двумя краями, проводить параллельные прямые), с помощью циркуля можно на данной прямой отложить любой данный отрезок, а также проводить окружности любого радиуса.

Главное в задачах на построение – это найти и описать последовательность действий (осуществляемых с помощью циркуля и линейки), ведущих к построению нужной фигуры, доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи, выяснить, всегда ли построение можно осуществить, сколько существует решений, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается, усложняется или делается невозможным.

При решении задач, как составные шаги решения, будем использовать основные построения, считая их известными (повторите по учебнику):

Построение 1: построение треугольника по трём сторонам.

Построение 2: построение угла, равного данному, от полупрямой в данную полуплоскость.

Построение 3: построение биссектрисы угла.

Построение 4: деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка).

Построение 5: построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

Построение 6: построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Как правило, решение задач на построение начинают с анализа задачи. Предполагают задачу решённой и делают от руки примерный чертёж искомой фигуры. По чертежу, используя данные задачи, пытаются установить, к нахождению какой точки (прямой, окружности) сводится решение задачи. При этом часто приходится проводить дополнительные построения. Иногда это делается наудачу, не зная заранее, принесёт ли такое построение пользу или нет. Удача и простота решения зависят главным образом от навыка решения таких задач, от знания методов решения задач на построение. Рассмотрим пример задачи на построение.

Задача 12. Дан отрезок m и острый угол α. Построить прямоугольный треугольник с углом α, у которого сумма катетов равна m.

▷ Анализ. Предположим, что задача решена, построен прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$ и $AC + BC = m$ (рис. 23). На прямой AC отложим отрезок CD, равный катету BC, тогда $AD = m$, а треугольник BCD – прямоугольный равнобедренный, и $\angle BDC = 45°$. Мы получили треугольник ABD, в котором известна сторона AD и два прилежащих к ней угла – такой треугольник можно построить.

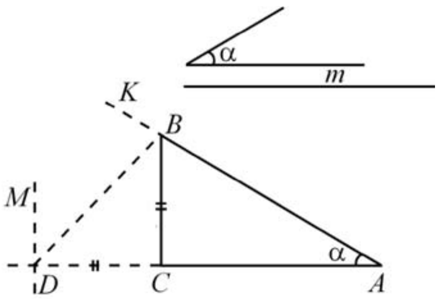


Рис. 23

Построение. Шаг 1. На прямой l откладываем отрезок $AD = m$ и строим угол DAK, равный данному углу α (построение 2).

Шаг 2. Через точку D проводим перпендикуляр DM к прямой DA (построение 5).

Шаг 3. Проводим биссектрису прямого угла MDC (построение 3), получаем точку B на луче AK.

Шаг 4. Через точку B проводим перпендикуляр к прямой AD (построение 5), получаем точку C. Треугольник ABC – искомый.

Действительно, $\angle BAC = \alpha$, а из $BC \perp AD$ и $\angle BDC = 45°$ следует, что $AC + BC = AC + CD = m$. Построение возможно всегда, треугольник ADB, а следовательно, и треугольник ABC определяются единственным образом. ◁

Замечание. В этой задаче была задана сумма двух сторон треугольника, и мы как бы “развернули” эти стороны так, что они легли на одну прямую, – получили отрезок AD. Этот приём называется методом спрямления и обычно применяется в задачах, условия которых содержат сумму или разность сторон треугольника (четырехугольника).

Обратите внимание, что в решении задач на построение можно выделить 4 обязательных этапа: анализ, в котором намечается план построения, само построение, доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям и, наконец, исследование возможности построения. Анализ опускают в простых задачах или тех, решение которых уже известно.

Одним из методов решения задач на построение является *метод геометрических мест*. Особенно удобен этот метод, когда требуется построить точку (или точки), удовлетворяющие нескольким условиям. При решении задач часто используется знание следующих геометрических мест:

а) геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии a от точки A, есть окружность радиуса a с центром в точке A;

б) геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B, есть серединный перпендикуляр отрезка AB;

в) геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от прямой l, есть две прямые, параллельные l;

г) геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой AB в точке C, есть перпендикуляр к AB в точке C (за исключением точки C)

д) геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой AB, есть окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B.

Проиллюстрируем указанный метод на следующей задаче.

Задача 13. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой l в точке B.

▷ Анализ. Так как окружность должна касаться прямой l в точке B (рис. 24), то её центр O должен принадлежать перпендикуляру BD к прямой l.

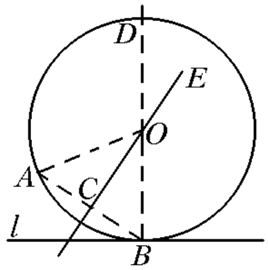


Рис. 24

Кроме того, окружность должна проходить через точки A и B, следовательно, её центр должен быть одинаково удалён от этих точек, т.е. лежать на серединном перпендикуляре CE к отрезку AB. Поэтому искомый центр, находясь одновременно на прямых BD и CE, является точкой их пересечения.

Построение – проведение этих прямых (построения 4 и 5).

Доказательство. $CE \perp AB$, $AC = CB$, $\Delta COB = \Delta COA$ (по двум катетам), следовательно, $OA = AB$. Точка B лежит на окружности и $OB \perp l$, следовательно, l – касательная в точке B.

Исследование. Задача имеет решение и притом единственное, если прямые BD и CE пересекаются, не параллельны, т.е. если точка A не лежит на прямой l. ◁

Метод подобия. Во многих задачах бывает удобно строить сначала не саму искомую фигуру, а ей подобную. В этом случае данные для построения разбиваются на две группы: одни используются для построения подобных фигур (подобных фигур существует бесконечно много), а другие служат для того, чтобы от этих фигур перейти к искомой. Метод подобия часто применяется при вписывании одних фигур в другие.

Задача 14. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы одна сторона квадрата лежала на стороне треугольника, а две вершины лежали на других сторонах треугольника.

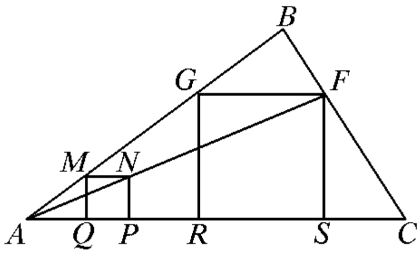


Рис. 25

▷ Ослабим задачу. Построим квадрат, у которого одна сторона лежит на стороне треугольника и одна вершина лежит на другой стороне треугольника. Эта задача проще и имеет много решений.

Возьмём, например, на стороне AB некоторую точку M (рис. 25) и опустим перпендикуляр MQ на AC. Далее строим квадрат $MNPQ$ (построение 5 и 6). Для построения искомого квадрата надо квадрат $MNPQ$ как бы “растянуть” так, чтобы он удовлетворял и другому условию: одна из вершин принадлежала стороне BC. Для этого проведём через точки A и N прямую AF. Опустим из точки F перпендикуляр FS на отрезок AC, проведём через точку F прямую, параллельную AC, и из точки G опустим перпендикуляр GR на отрезок AC (построения 5 и 6). Докажем, что $FSRG$ – квадрат. Достаточно доказать, что $FS = FG$. Из подобия треугольников ANP и AFS имеем

$$FS : NP = AF : AN \qquad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников AMN и AGF имеем

$$FG : MN = AF : AN \qquad (2)$$

Так как $NP = MN$, то из (1) и (2) следует, что $FS = FG$, т.е. $FRSG$ – квадрат. Исследование проведите самостоятельно. ◁

В заключении остановимся на *методе симметрии*. Задачу иногда удаётся упростить, заменив один из заданных элементов (точку, прямую, окружность) другим, симметрично расположенным относительно некоторой прямой. Классическим примером такой задачи является следующая.

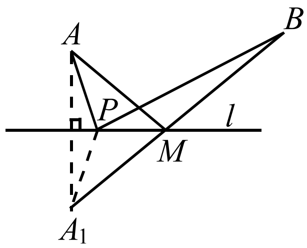


Рис. 26

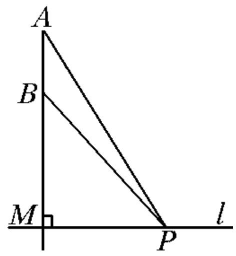


Рис. 27

Задача 15. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая.

▷ Анализ. Рассмотрим точку A_1, симметричную данной точке A относительно данной прямой (рис. 26), и пусть точка P – произвольная точка этой прямой. Так как $AP = A_1P$, то $AP + BP = A_1P + BP.$ Сумма $AP + PB$ будет наименьшей, когда сумма $A_1P + PB$ достигнет наименьшего значения. А последняя сумма, очевидно, будет наименьшей тогда, когда точка P будет лежать на прямой $A_1B.$

Теперь очевидно построение: строим точку, симметричную одной из заданных точек относительно заданной прямой, проводим через неё и другую точку прямую; точка пересечения построенной прямой и данной будет искомой. Доказательство очевидно. Задача всегда имеет единственное решение. В частном случае, когда точки A и B лежат на общем перпендикуляре к прямой, построение очевидно (рис. 27).

$$AP + PB > AM + BM \text{, если } P \neq M \text{ . } \triangleleft$$

Контрольные вопросы

1(2). Как измеряется угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности? Хорда $AC = a$ образует $\angle\alpha$ с касательной CB (рис. 29). Чему равен радиус окружности?

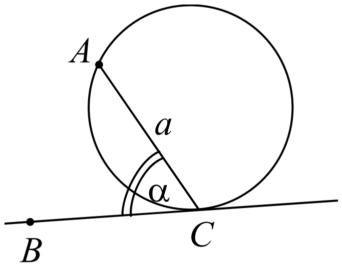


Рис. 29

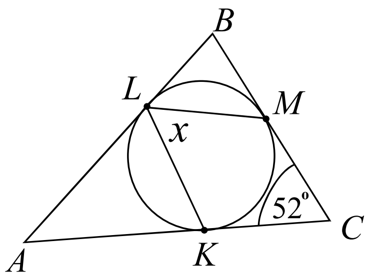


Рис. 30

2(2). Окружность вписана в треугольник $ABC,$ касается сторон в точках K, L и $M,$ угол C равен 52° (рис. 30). Чему равен $\angle KLM$?

3(3). Как выражается длина хорды a через радиус окружности R и величину вписанного угла $\alpha,$ опирающегося на неё? Приведите доказательство.

4(2). Даны окружность, касательная MA и секущая MC (рис 31). Известно, что $AB = 2, AC = 3$ и $BC = 4.$ Чему равны длины отрезков MA и MB?

5(2). Могут ли отрезки секущих быть такими, как указано на рис. 32?

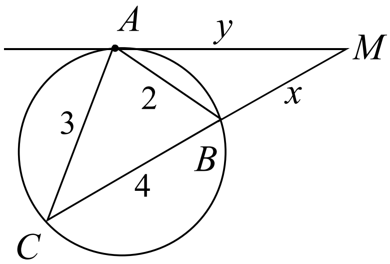


Рис. 31

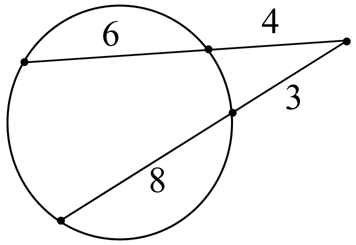


Рис. 32

6(2). Две окружности внешне касаются в точке M. Через точку M проведены две прямые: одна пересекает окружности в точках A и B, другая – в точках C и D (рис 33). Верно ли, что прямые AC и DB параллельны?

7(3). Когда около четырёхугольника можно описать окружность? Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, продолжения сторон AB и DC пересекаются в точках M и N (рис. 34). Известно, что углы

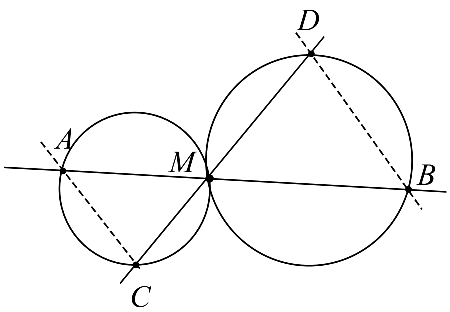


Рис. 33

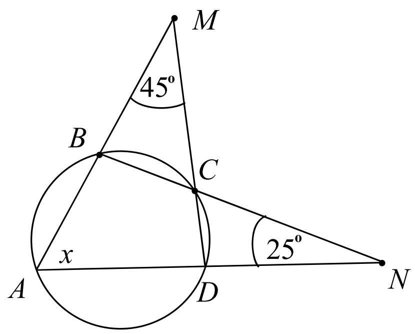


Рис. 34

M и N равны 45° и 25°. Чему равен угол MAN?

8(3). Когда в выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность? а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка $A'B'$, параллельного AB и равного 1/3 AB. Чему равна длина стороны AB, если периметр треугольника ABC равен 24?

б) В трапецию $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана окружность с центром в точке O. Чему равны углы KOL и MON?

9(3). В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и KM. Как доказать, что $AK^2 + BM^2 = 4R^2$?

10(6). Даны отрезки $a, b, c.$ Как с помощью циркуля и линейки построить отрезки (дайте краткое описание):

а) $x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_2 = \sqrt{ab}, \quad x_3 = \dfrac{a \cdot c}{b}.$

б) Как построение отрезков $y_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (a > b), \quad y_2 = \dfrac{a^3}{b^2},$

$y_3 = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$ свести к применению каких-то из построений из а)?

Задачи

1(4). Около окружности описан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = 1, BC = 2, CD = 3, \ DE = 4.$ Найти длину стороны AE, если известно, что она выражается целым числом (свойство касательных, см. реш. Задачи 1 Задания).

2(5). Через точку C, лежащую на диаметре AB, под углом 60° к нему проведена хорда MN, при этом $MC = 3, \quad CN = 8.$ Найти радиус окружности.

3(5). В ΔABC со сторонами $AB = 4, BC = 6,$ биссектриса $BD = 3\sqrt{2}.$ На биссектрисе BD как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точке A_1 и C_1 соответственно.

Найти: а) длину стороны AC;

б) длины отрезков BA_1 и BC_1 (см. теорему 3 Задания).

4(5). В окружность радиуса 5 вписана трапеция $ABCD$, диагонали которой взаимно перпендикулярны и большее основание $AD = 8.$

Найти: а) меньшее основание;

б) боковую сторону.

5(6). Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$. Окружность касается боковой стороны AB в точке K. Прямая DK пересекает окружность в точке P, при этом $DP = 4$ и $KP = 5$. Найти

а) длину большего основания AD;

б) косинус угла A;

в) радиус окружности.

6(5). Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешне в точке A. Общая касательная, проходящая через точку A, пересекает общую внешнюю касательную MN в точке K. Радиусы данных окружностей равны 4 и 1. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник O_1KO_2.

7(5) Через точку M проведены три прямые: одна касается данной окружности в точке A, другая – в точке B, а третья прямая пересекает окружность в точках C и $D\left(MC > MD\right)$. Известно, что $MC = 6$ и $\sin\left(AMC\right)\cdot\sin\left(BMC\right) = \frac{1}{2}$. Найти расстояние от точки C до прямой AB (см задачу 3 на стр. 5 Задания).

8*. Доказать теорему Птолемея: если четырехугольник вписан в окружность, то имеет место равенство $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD$. Применить эту терему к решению задачи: квадрат $ABCD$ вписан в окружность; на дуге BC взята некоторая точка M; найти отношение $\left(AM + MD\right):\left(MC + MB\right)$.

9(4). Дана окружность с центром в точке O. Из точки M, лежащей вне круга, провести секущую так, чтобы её отрезок внутри круга был равен её отрезку вне круга.

10(5). Даны две пересекающиеся окружности, даны их центры. Через точку пересечения окружностей провести прямую так, чтобы окружности высекали на ней две равные хорды (метод симметрии).

11(6). Дана прямая и две точки A и B по одну сторону от прямой. Провести через точки A и B окружность, касающуюся прямой.

12*. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, основания трапеции AD и BC $(AD > BC)$. Около треугольника BOC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку O, пересекает прямую AD в точке K (AK больше AD). Найти длину отрезка OK, если $AD = a$ и $DK = b$.

