Контрольные вопросы

1(2). Как измеряется угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности? Хорда $AC = a$ образует $\angle\alpha$ с касательной CB (рис. 29). Чему равен радиус окружности?

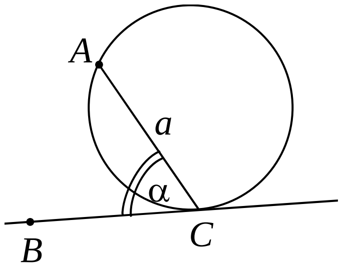

Рис. 29

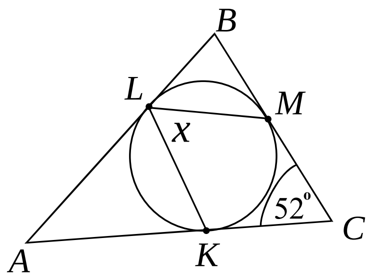

Рис. 30

2(2). Окружность вписана в треугольник ABC, касается сторон в точках K, L и M, угол C равен 52° (рис. 30). Чему равен $\angle KLM$?

3(3). Как выражается длина хорды a через радиус окружности R и величину вписанного угла α, опирающегося на неё? Приведите доказательство.

4(2). Даны окружность, касательная MA и секущая MC (рис 31). Известно, что $AB = 2, AC = 3$ и $BC = 4$. Чему равны длины отрезков MA и MB?

5(2). Могут ли отрезки секущих быть такими, как указано на рис. 32?

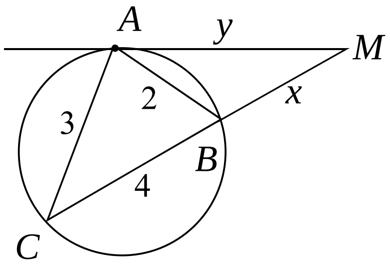

Рис. 31

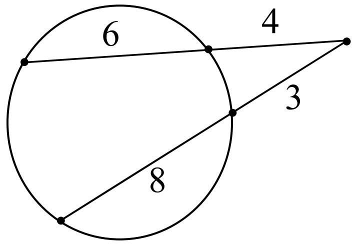

Рис. 32

6(2). Две окружности внешне касаются в точке M. Через точку M проведены две прямые: одна пересекает окружности в точках A и B, другая – в точках C и D (рис 33). Верно ли, что прямые AC и DB параллельны?

7(3). Когда около четырёхугольника можно описать окружность? Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, продолжения сторон AB и DC пересекаются в точках M и N (рис. 34). Известно, что углы

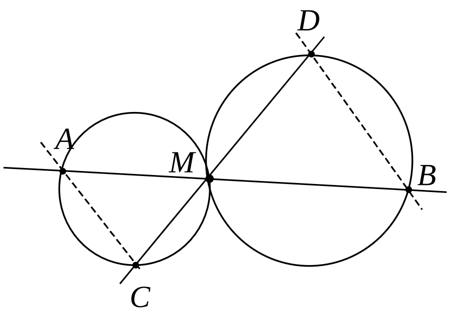

Рис. 33

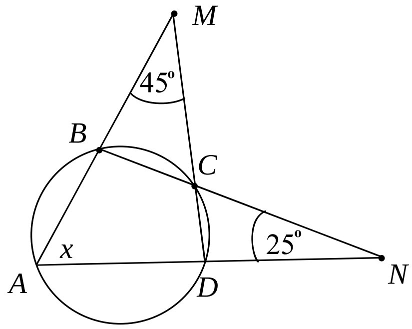

Рис. 34

M и N равны 45° и 25°. Чему равен угол MAN?

8(3). Когда в выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность? а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка $A'B'$, параллельного AB и равного 1/3 AB. Чему равна длина стороны AB, если периметр треугольника ABC равен 24?

б) В трапецию $KLMN$ с основаниями KN и LM вписана окружность с центром в точке O. Чему равны углы KOL и MON?

9(3). В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и KM. Как доказать, что $AK^2 + BM^2 = 4R^2$?

10(6). Даны отрезки $a, b, c.$ Как с помощью циркуля и линейки построить отрезки (дайте краткое описание):

а) $x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_2 = \sqrt{ab}, \quad x_3 = \dfrac{a \cdot c}{b}.$

б) Как построение отрезков $y_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (a > b), \quad y_2 = \dfrac{a^3}{b^2},$

$y_3 = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$ свести к применению каких-то из построений из а)?

Задачи

1(4). Около окружности описан пятиугольник $ABCDE,$ в котором $AB = 1, BC = 2, CD = 3, \; DE = 4.$ Найти длину стороны $AE,$ если известно, что она выражается целым числом (свойство касательных, см. реш. Задачи 1 Задания).

2(5). Через точку $C,$ лежащую на диаметре $AB,$ под углом 60° к нему проведена хорда $MN,$ при этом $MC = 3, \quad CN = 8.$ Найти радиус окружности.

3(5). В ΔABC со сторонами $AB = 4, BC = 6,$ биссектриса $BD = 3\sqrt{2}.$ На биссектрисе BD как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точке A_1 и C_1 соответственно.

Найти: а) длину стороны AC;

б) длины отрезков BA_1 и BC_1 (см. теорему 3 Задания).

4(5). В окружность радиуса 5 вписана трапеция $ABCD,$ диагонали которой взаимно перпендикулярны и большее основание $AD = 8.$

Найти: а) меньшее основание;

б) боковую сторону.

5(6). Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$. Окружность касается боковой стороны AB в точке K. Прямая DK пересекает окружность в точке P, при этом $DP = 4$ и $KP = 5$. Найти

а) длину большего основания AD;

б) косинус угла A;

в) радиус окружности.

6(5). Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешне в точке A. Общая касательная, проходящая через точку A, пересекает общую внешнюю касательную MN в точке K. Радиусы данных окружностей равны 4 и 1. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник O_1KO_2.

7(5) Через точку M проведены три прямые: одна касается данной окружности в точке A, другая – в точке B, а третья прямая пересекает окружность в точках C и $D\left(MC > MD\right)$. Известно, что $MC = 6$ и $\sin\left(AMC\right)\cdot\sin\left(BMC\right) = \frac{1}{2}$. Найти расстояние от точки C до прямой AB (см задачу 3 на стр. 5 Задания).

8*. Доказать теорему Птолемея: если четырехугольник вписан в окружность, то имеет место равенство $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD$. Применить эту терему к решению задачи: квадрат $ABCD$ вписан в окружность; на дуге BC взята некоторая точка M; найти отношение $\left(AM + MD\right):\left(MC + MB\right)$.

9(4). Дана окружность с центром в точке O. Из точки M, лежащей вне круга, провести секущую так, чтобы её отрезок внутри круга был равен её отрезку вне круга.

10(5). Даны две пересекающиеся окружности, даны их центры. Через точку пересечения окружностей провести прямую так, чтобы окружности высекали на ней две равные хорды (метод симметрии).

11(6). Дана прямая и две точки A и B по одну сторону от прямой. Провести через точки A и B окружность, касающуюся прямой.

12*. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, основания трапеции AD и BC $\left(AD > BC\right)$. Около треугольника BOC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку O, пересекает прямую AD в точке K (AK больше AD). Найти длину отрезка OK, если $AD = a$ и $DK = b$.