Вторая часть по планиметрии содержит три параграфа. В § 1 подробно обсуждаются свойства касательных, хорд и секущих, доказывается теорема “о касательной и секущей”. § 2 посвящён вписанным и описанным четырёхугольникам, теме, которая практически не рассматривается в учебнике. В § 3 рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Этой теме, к сожалению, в школе также мало уделяется внимания, хотя именно в задачах на построение лучше всего усваивается и закрепляется теоретический материал.

В решениях задач § 2 будут применяться теоремы косинусов и синусов, более подробно эти теоремы будут обсуждаться в задании “Планиметрия”, часть III в 10 классе ФЗТШ. Здесь мы только напомним эти теоремы. Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены a, b, c, а величины противолежащих углов α, β, γ, справедливы две теоремы, утверждения которых можно кратко записать так:

теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Напомним также, что в учебнике доказано, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN, точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\Delta AOM = \Delta AON$. Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO$. Таким образом, если из

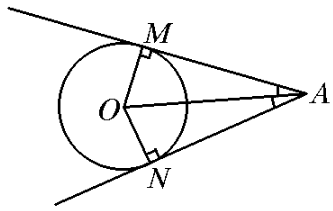


Рис. 1

точки к окружности проведены две касательные, то:

1°**. отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;**

2°**. прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.**

Используя свойство 1, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность.)

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D, при этом $DA = a$, $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN.

$\triangleright$ Пусть $a > b$. Обозначим $x = MN$,

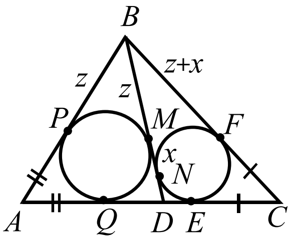


Рис. 2

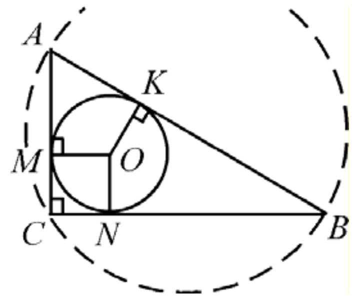


Рис. 3

$y = ND,\ z = BM$. По свойству касательных $DE = y$, $QD = x + y$, $AQ = AP = a - (x + y)$, $CE = CF = b - y$, $BP = z$ и $BF = z + x$. Выразим боковые стороны: $AB = z + a - x - y$, $BC = z + x + b - y$. По условию $AB = BC$, поэтому $z + a - x - y = z + x + b - y$. Отсюда находим $x = (a - b)/2$. Итак, $MN = (a - b)/2$. Если $a < b$, то $MN = (b - a)/2$. Итак, $MN = \dfrac{1}{2}|a - b|$. $\triangleleft$

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т.е. $a + b = 2R + 2r$.

$\triangleright$ Пусть M, N и K – точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC = b$, $BC = a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Вспомним, что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R$. Далее,

$OM \perp AC$, $BC \perp AC$, значит, $OM \| BC$, аналогично $ON \perp BC$, $AC \perp BC$, значит, $ON \| AC$. Четырёхугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r, поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r$.

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN$, поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т.к. $AB = 2R$, то получаем $a + b = 2R + 2r$. ◁

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами.

▷ Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 4). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α. Соединим точки A и B с центром окружности. Так как $OA \perp AN$, $OA = OB$, то $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \alpha$. Сумма углов треугольника равна $180°$, поэтому $\angle AOB = 2\alpha$.

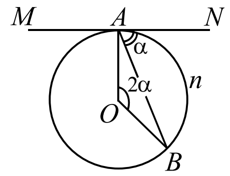


Рис. 4

Таким образом, градусная мера угла BAN между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB, которая заключена между его сторонами. (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAB.) ◁

Задача 3. Точка C лежит на окружности и отстоит от касательных, проведённых из точки M к окружности, на расстоянии $CS = a$ и $CP = b$ (рис. 5). Доказать, что $CK = \sqrt{ab}$. (Это утверждение называется лемма Адамара).

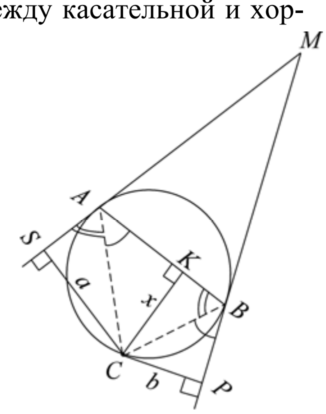


Рис. 5

▷ Проведём хорды CA и CB. Угол SAC между касательной SA хордой AC равен вписанному углу ABC. А угол PBC между касательной PB и хордой BC равен вписанному углу BAC.

Получили две пары подобных прямоугольных треугольников $\Delta ASC \sim \Delta BKC$ и $\Delta BPC \sim \Delta AKC$. Из подобия имеем $\dfrac{a}{AC} = \dfrac{x}{BC}$ и $\dfrac{b}{BC} = \dfrac{x}{AC}$, откуда следует $ab = x^2$, $x = \sqrt{ab}$. (Ч.т.д.) $\triangleleft$

Докажем теорему, обычно называемую “теоремой о касательной и секущей”.

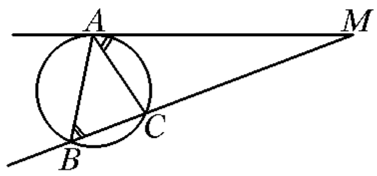


Рис. 6

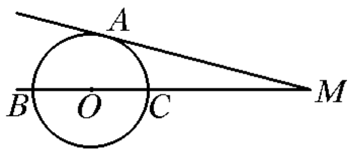


Рис. 7

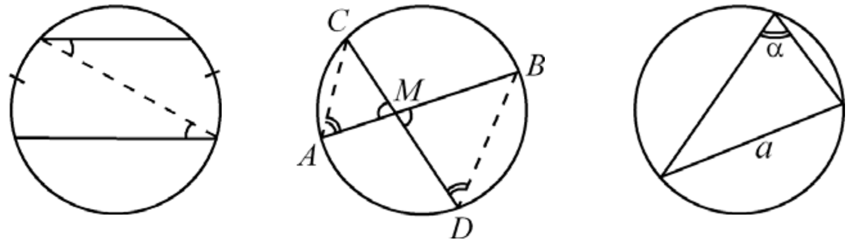
Теорема 2. Пусть из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB, пересекающая окружность в точке C (рис. 6). Тогда справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т.е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек её пересечения с окружностью.

$\triangleright$ Проведём хорду AC. Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC, оба измеряются половиной градусной меры дуги AC. В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA, а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA / MB = MC / MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. $\triangleleft$

Задача 4. Радиус окружности равен r. Из точки M проведены касательная MA и секущая MB, проходящая через центр окружности (рис. 7). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

$\triangleright$ Обозначим искомое расстояние x: $x = MO$, тогда $MB = x + r$, $MC = x - r$ и по условию $MA = MB / 2 = (x + r) / 2$. По теореме о касательной и секущей $(x + r)^2 / 4 = (x + r)(x - r)$, откуда, сокращая на

$(x+r)$, получаем $(x+r)/4=(x-r)$. Легко находим $x=5r/3$. ◁



а) **б)** **в)**

Рис. 8

Напомним также следующие свойства хорд окружности:

1°. **Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Обратно: диаметр, проходящей через середину хорды (не являющуюся диаметром) перпендикулярен ей.**

2°. **Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратно: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.**

3°. **Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны (см. рис. 8а).**

4°. **Если две хорды** AB **и** CD **пересекаются в точке** M, **то** $AM\cdot MB=CM\cdot MD$, **т.е. произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды (см. рис. 8б).**

5°. **В окружности радиуса** R **длина хорды** a **и величина** α **вписанного угла, опирающегося на эту хорду, связаны соотношением** $a=2R\cdot\sin\alpha$.

Задача 5. В окружности проведены три равные хорды $AB=BC= \ =CD=a$. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, угол $BKC=120°$ (рис. 9). Найти радиус окружности.

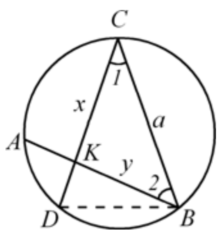


Рис. 9

▷ Обозначим $CK=x$, $BK=y$, тогда $AK=a-y$, $DK=a-x$. По свойству 4^0 имеем: $CK\cdot DK=AK\cdot BK$, т.е. $x(a-x)=y(a-y)$. Это равенство преобразуем к виду $(x-y)(a-x-y)=0$. Так как $a\neq x+y$ (в этом случае треугольник BKC не существует), то $x=y$. Следовательно, треугольник $BKC-$

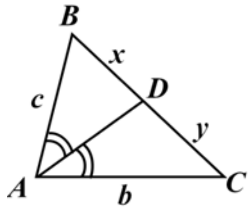
равнобедренный и $\angle 1 = \angle 2 = 30°$. Из теоремы синусов следует, что $R = BD/2\sin(\angle 1)$. BD найдём из ΔBCD по

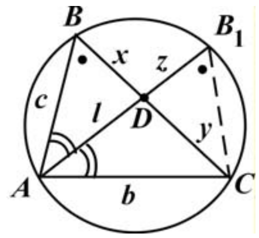
теореме косинусов: $BD = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos 30°} = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Таким образом, $R = BD/2\sin 30^\circ = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. ◁

Используем свойство пересекающихся хорд для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $AD -$ биссектриса треугольника $ABC,$ тогда $AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot CD,$ т.е. если $AB = c,$ $AC = b,$ $BD = x,$ $DC = x,$ то $AD^2 = bc - xy$ (рис. 9а).





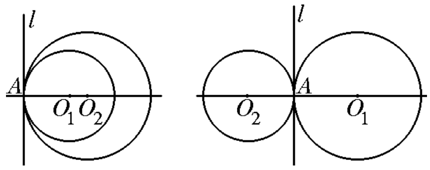
а) б)

Рис. 10

□ Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 10б) и точку пересечения продолжения биссектрисы AD с окружностью обозначим B_1. Обозначим $AD = l$ и $DB_1 = z$. Вписанные углы ABC и AB_1C равны, $AD -$ биссектриса угла $A,$ поэтому $\triangle ABD \backsim \triangle AB_1C$ (по двум углам). Из подобия имеем $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AB_1},$ т.е. $\dfrac{l}{b} = \dfrac{c}{l+z},$ откуда $l^2 = bc - lz.$ По свойству пересекающихся хорд $BD\cdot DC = AD\cdot DB_1,$ т.е. $xy = lz,$ поэтому получаем $l^2 = bc - xy.$ ■

Напомним, что в задании 1 доказано свойство биссектрисы треугольника: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC},$ т.е. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}.$

В заключении параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются касающимися внутренне (рис. 10а), а если расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 11б).



а) **Рис. 11** б)

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l$, $AO_2 \perp l$ следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров.*

Задача 6. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 12). Найти AB, если $BC = a$.

▷ Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB$, то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т.к. радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2$.

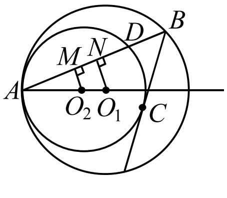


Рис. 12

По теореме о касательной и секущей имеем: $BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2\left(1 - \dfrac{AD}{AB}\right)$, т.е.

$$a^2 = AB^2\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right).$$

Итак, $AB = a\sqrt{\dfrac{R_1}{R_1 - R_2}}$. ◁

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 13). Их общая внешняя касательная

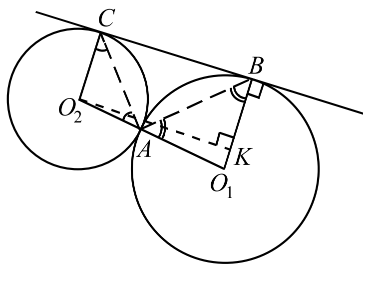


Рис. 13

касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

▷ Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C. По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \| O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180°$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle CO_2A$, то $\angle ABC + \angle ACB = 90°$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 90°$, и поэтому радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, равен половине гипотенузы BC.
Найдём BC. Пусть $O_2K \perp O_1B$, тогда $KO_2 = BC$, $O_1K = R_1 - R_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. ◁